1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok? A *b*) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin^n(n)}{(n+2)^n}(x-2)^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n!}$$

Mo. *a*) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := \dfrac{\sin^n(n)}{(n+2)^n}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{|\sin(n)|}{n+2} \underset{(\mathbf{4p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

azaz a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$ **(2p)** , tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}}{2n!} \overset{(\mathbf{3p})}{=} (x+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{2n!} \overset{(\mathbf{5p})}{=} (x+1)\operatorname{ch}(x+1) \quad .$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n)!}$ sor konvergenciasugarának meghatározásáért önmagában nem jár pont.)

---

2. feladat (10+12=22 pont)
Legyen

$$f(x) := \sqrt[3]{8+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

a) Határozzuk meg az f függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.

b) Adjuk meg az $f^{(99)}(0)$ és $f^{(100)}(0)$ deriváltakat és a (0 középpontú) Taylor sor 4. együtthatóját; az utóbbit kizárólag az alapműveletek és hatványozás segítségével.

Mo. *a*)

$$f(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} 2\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{8}} \overset{(\mathbf{4p})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{x^{2n}}{2^{3n-1}},$$

ahol az utolsó egyenlőség $x^2 < 8$ esetén teljesül **(2p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara $2\sqrt{2}$ **(1p)**.

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje a_n a (0 középpontú) Taylor-sor n-edik együtthatóját. Ekkor

$$f^{(99)}(0) \overset{(\mathbf{1p})}{=} 99! \cdot a_{99} \overset{(\mathbf{2p})}{=} 99! \cdot 0 = 0$$

$$f^{(100)}(0) \overset{(\mathbf{1p})}{=} 100! \cdot a_{100} \overset{(\mathbf{4p})}{=} 100! \cdot \binom{\frac{1}{3}}{50} \frac{1}{2^{149}}$$

$$a_4 \overset{(\mathbf{1p})}{=} \binom{\frac{1}{3}}{2} \frac{1}{2^5} \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\frac{1}{3^2 2^5}$$

---

3. feladat (12 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{|xy|} = ?$$

Mo. Legyen $f(x,y) := \frac{\sin(xy)}{|xy|}$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Ekkor

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \ (\mathbf{4p}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,-x) = -1 \ (\mathbf{6p}),$$

tehát a kérdéses határérték nem létezik **(2p)** .

---

4. feladat (12+4+5=21 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{x^6 + y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

c) Számítsuk ki az f függvény $(1,0)$ pontbeli $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ irány menti deriváltját.

Mo. *a)* Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+y^2}} \quad (\mathbf{2p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^6+y^2}} \quad (\mathbf{2p}).$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3}{x} = 0 \quad (\mathbf{3p}),$$

$$\lim_{y\to 0\pm} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0\pm} \frac{|y|}{y} = \pm 1 \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

b) Az origóban f nem differenciálható, mert $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .

c) Az f függvény differenciálható az $(1,0)$ pontban ezért $\underline{e} := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ esetén

$$D_{\underline{e}}(1,0) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \langle \operatorname{grad} f(1,0), \underline{e} \rangle \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left\langle (3,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{3}{\sqrt{2}}$$

---

5. feladat (5+20=25 pont)

a) Mit mond ki a Weierstrass-tétel (más néven: Weierstrass-féle maximum-minimum elv) $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén?

b) Legyen

$$f(x,y) := xy(2-x-y) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Határozzuk meg f szélsőértékeit (amennyiben léteznek) a $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ csúcspontok által meghatározott háromszöglapon.

Mo. *a*) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvény és $K \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ kompakt halmaz **(2p)**. Ekkor létezik olyan $\underline{x}_-$, $\underline{x}_+ \in K$, hogy

$$f\left(\underline{x}_-\right) = \inf_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) \quad \text{és} \quad f\left(\underline{x}_+\right) = \sup_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) \quad \textbf{(3p)}.$$

b) Legyen T a feladatbeli halmaz, azaz

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 2-x\} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az f függvény folytonos a T halmazon, és T kompakt, így a Weierstrass-tétel alapján f-nek léteznek szélsőértékei a T halmazon **(1p)** . T belső pontjaiban f differenciálható, ezért itt a stacionárius pontokban lehetnek szélsőértékek **(1p)** . Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 2y - 2xy - y^2 \quad \textbf{(1p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = 2x - x^2 - 2xy \quad \textbf{(1p)}.$$

$$\left.\begin{array}{r} y(2-2x-y) = 0 \\ x(2-x-2y) = 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(3p)} \overset{(x,y)\in\mathrm{int}(T)}{\Leftrightarrow} (x,y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \textbf{(4p)},$$

azaz egy lehetséges szélsőértékhely: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

T minden határpontjában 0 a függvényérték **(4p)** , továbbá $f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$ **(1p)** , következésképpen

$$\min_T f = 0 \quad \text{és} \quad \max_T f = \frac{8}{27} \quad \textbf{(2p)}.$$
