

1. feladat (12+8 pont)

a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-2y^2} \operatorname{ch}(2x)}{y}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 + 1 + x^2 + 2x$$

differenciálegyenlet $K_1 = 1$ -hez és $K_2 = 4$ -hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajtuk egy-egy vonalelemet!

2. feladat (20 pont)

Az $u := y^3$ helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (Explicit alakban adjuk meg az általános megoldást!)

$$3y^2 y' - 2xy^3 = e^{x^2} \ln(x) \quad (x > 0)$$

3. feladat (20 pont)

Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 4y' + 5y = 13 \sin(2x)$$

4. feladat (7+7+7=21 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3}$

b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^n$

c) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 3 + 7^n}{2 + 2^{2n}}$

5. feladat (5+14=19 pont)

a) Mit mond ki az integrálkritérium?

b) Konvergense-e a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} \frac{1}{2n \ln^2(n)}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtrivális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} = \sum_{n=2}^{99} \frac{1}{2n \ln^2(n)}$ részletösszeggel közelítjük.

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 6n + 4}$$

összeget.

(Ha az összeg meghatározása nem sikerül, akkor legfeljebb **5 IMSc pontért** adjunk olyan $K_1 \in \mathbb{R}$ alsó és $K_2 \in \mathbb{R}$ felső becslést az összegre, amelyekre $K_2 - K_1 \leq 0,2$.)