1. feladat (16+6=22 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{x^2+2x} \quad (x \neq 0, -2)$$

b) Adjuk meg az összes olyan f számsorozatot, amelyre teljesül az

$$f(n) = \frac{5}{4} f(n-1) - \frac{1}{4} f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geq 2)$$

lineáris rekurzió.

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{x^2+2x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arsh}(y) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala (parciális törtekre bontással):

$$\int \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x\right) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2}\left(\ln|x| - \ln|x+2|\right) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\operatorname{arsh}(y(x)) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

b) A lineáris rekurzióhoz tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

amelynek gyökei: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ **(2p)** . Ebből a rekurzió általános megoldása:

$$f(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + C_2 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az

$$\frac{y'}{x} = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \quad (x \neq 0,\, y \neq 0)$$

differenciálegyenletet az $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett. A megoldást explicit alakban adjuk meg.

Mo. Átrendezve:

$$y'(x) = \frac{x^2}{y^2(x)} + \frac{y(x)}{x} \quad (\mathbf{2p}).$$

Legyen $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ **(2p)** . Ekkor

$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát az új differenciálegyenlet:

$$u'(x) = \frac{1}{xu^3(x)} \quad (\mathbf{1p})$$

Szeparálható, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u^2x} \quad \Longrightarrow \quad \int u^2\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{u^2(x)}{3} = \ln|x| + \widetilde{C} \quad (\widetilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}),$$

tehát az eredeti egyenlet megoldása:

$$y(x) = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C} \quad (\mathbf{4p}).$$

A megadott kezdeti feltétel melletti megoldást jelölje $\widetilde{y}$, ekkor:

$$\widetilde{y}(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1 \quad (\mathbf{1p}) \qquad \Longrightarrow \quad \widetilde{y}(x) = x\sqrt[3]{3\ln(x) + 1} \quad (\mathbf{1p}) \quad \left(x > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) \quad (\mathbf{1p}).$$

---

3. feladat (18 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 2y'' = 8e^{2x}$$

Mo. Harmadrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -2$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,\acute{a}}(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük $y(x) = Ae^{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$) alakban (nincs rezonancia) **(2p)** . Deriválva háromszor **(3p)** :

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ae^{2x} && |\cdot 0\\
y'(x) &= 2Ae^{2x} && |\cdot 0\\
y''(x) &= 4Ae^{2x} && |\cdot 2\\
y'''(x) &= 8Ae^{2x} && |\cdot 1
\end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$16Ae^{2x} = 8e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= \frac{e^{2x}}{2} + C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

---

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n\in\mathbb{N}} ne^{-n-2} \qquad b) \sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{arctg}(n) \qquad c) \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{\sin(2^n)}{3^n}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := ne^{-n-2} \quad (n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{e\sqrt[n]{e^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1 \quad (\mathbf{3p}),$$

Tehát a gyökkritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := \operatorname{arctg}(n) \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$b_n \underset{(\mathbf{4p})}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{\pi}{2} \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := (-1)^n \frac{\sin(2^n)}{3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|c_n| \leq \frac{1}{3^n} \quad (\mathbf{5p}),$$

és $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ abszolút konvergens **(2p)** következésképpen konvergens **(1p)** .

---

5. feladat (3+15=18 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort feltételesen konvergensnek? (Írjuk le a definíciót.)

b) Divergens, abszolút konvergens vagy feltételesen konvergens a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2+2}$$

sor?

Mo. *a*) Egy numerikus sort feltételesen konvergensnek nevezünk, ha konvergens és nem abszolút konvergens. **(3p)**

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := (-1)^n \dfrac{2n-1}{n^2+2}$. Ekkor

$$|a_n| \geq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad \textbf{(3p)},$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{3n}$ sor divergens, azaz a minoráns kritérium szerint a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor nem abszolút konvergens **(2p)**.

A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor alternál **(1p)** , $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ **(2p)** , illetve

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2n+1}{(n+1)^2+2} \leq \frac{2n-1}{n^2+2} \\
&\Leftrightarrow \quad (2n+1)(n^2+2) \leq (2n-1)(n^2+2n+3) \\
&\Leftrightarrow \quad 2n^3+n^2+4n+2 \leq 2n^3+3n^2+4n-3 \\
&\Leftrightarrow \quad 5 \leq 2n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2 \quad \textbf{(4p)},
\end{aligned}$$

azaz $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ egy küszöbindextől kezdve monoton csökkenő **(1p)** . A Leibniz-kritérium alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(1p)** , következésképpen feltételesen konvergens **(1p)** .

---

6. feladat (plusz 10 pontért)
Konvergens-e a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sor?

Mo. Sejtés: divergens, mert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n}$ sor divergens **(2p)** . Az előbbi határérték és az átviteli elv alapján **(2p)** legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2n} \quad \textbf{(4p)}.$$

A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n}$ sor divergens, tehát a minoráns kritérium szerint a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sor is divergens **(2p)** .
