1. feladat (12+8 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-2y^2}\,\mathrm{ch}(2x)}{y}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 + 1 + x^2 + 2x$$

differenciálegyenlet $K_1 = 1$-hez és $K_2 = 4$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajtuk egy-egy vonalelemet!

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{-2y^2}\,\mathrm{ch}(2x)}{y} \quad \Longrightarrow \quad \int y e^{2y^2}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(2p)}$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int y e^{2y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}e^{2y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(4p)}$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \mathrm{ch}(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2x) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(4p)}$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{1}{2}e^{2y^2(x)} = \mathrm{sh}(2x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(2p)}$$

b) A $K_1 = 1$-hez tartozó izoklina egyenlete

$$y^2 + (x+1)^2 = 1$$

ami egy $(-1, 0)$ középpontú 1 sugarú körvonal. **(3p)** A vonalelemek 1 meredekségűek. **(1p)**

A $K_1 = 4$-hez tartozó izoklina egyenlete

$$y^2 + (x+1)^2 = 4$$

ami egy $(-1, 0)$ középpontú 2 sugarú körvonal. **(3p)** A vonalelemek 4 meredekségűek. **(1p)**

2. feladat (20 pont)
Az $u := y^3$ helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (Explicit alakban adjuk meg az általános megoldást!)

$$3y^2y' - 2xy^3 = e^{x^2}\ln(x) \quad (x > 0)$$

Mo. A helyettesítés után az egyenlet:

$$u' - 2xu = e^{x^2}\ln(x) \quad (\mathbf{2p})$$

Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$u' - 2xu = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{h,á}(x) = Ce^{x^2} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p})$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $u(x) = c(x)e^{x^2}$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)e^{x^2} + 2xc(x)e^{x^2}}_{u'(x)} \underbrace{-2xc(x)e^{x^2}}_{-2xu(x)} = e^{x^2}\ln(x) \quad (\mathbf{2p})$$

Ebből pedig $c'(x) = \ln(x)$. Parciális integrálással

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := x\ln(x) - x$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$u_{i,p}(x) = c(x)e^{x^2} = xe^{x^2}(\ln(x) - 1) \quad (\mathbf{1p})$$

Amiből az általános megoldás:

$$u_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} u_{i,p}(x) + u_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} xe^{x^2}(\ln(x) - 1) + Ce^{x^2} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+)$$

Visszahelyettesítve:

$$y(x) = \sqrt[3]{xe^{x^2}(\ln(x) - 1) + Ce^{x^2}} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+) \quad (\mathbf{2p})$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 4y' + 5y = 13\sin(2x)$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \textbf{(2p)},$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, **(2p)** . Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^{2x}\sin(x) + C_2 e^{2x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(4p)}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(2p)}$$

alakban keressük (nincs rezonancia). Deriválva kétszer **(2p)** :

$$\begin{aligned} y(x) &= A\sin(2x) + B\cos(2x) && |\cdot 5 \\ y'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) && |\cdot(-4) \\ y''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) && |\cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = (A + 8B)\sin(2x) + (-8A + B)\cos(2x) = 13\sin(2x) \quad \textbf{(2p)}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{5},\ B = \frac{8}{5} \quad \textbf{(3p)},$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{8}{5}\cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(1p)}$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{8}{5}\cos(2x) + C_1 e^{2x}\sin(x) + C_2 e^{2x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad \textbf{(2p)} \end{aligned}$$

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+3+7^n}{2+2^{2n}}$$

Mo. *a)* Legyen $a_n := \frac{\sin^n(2n^2)}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$|a_n| \le \frac{1}{n^3} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad (\mathbf{4p}),$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^3}$ numerikus sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ abszolút konvergens **(1p)** , következésképpen konvergens **(1p)** .

b) Legyen $b_n := \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$b_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \xrightarrow[(\mathbf{2p})]{n\to\infty} \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} \neq 0 \quad (\mathbf{1p})$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{n^2+3+7^n}{2+2^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Első megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$c_n \ge \frac{7^n}{2\cdot 4^n} \ge 0 \quad (\mathbf{4p})$$

és a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right)^n$ sor divergens **(1p)** , tehát a minoráns kritérium alapján $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .
Második megoldás.

$$c_n = \frac{n^2+3+7^n}{2+4^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\frac{n^2}{2^n}+3+\left(\frac{7}{4}\right)^n}{\frac{2}{4^n}+1} \xrightarrow[(\mathbf{2p})]{n\to\infty} +\infty \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ divergens **(2p)** .

5. feladat (5+14=19 pont)
a) Mit mond ki az integrálkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} = \sum_{n=2}^{99} \frac{1}{2n\ln^2(n)}$ részletösszeggel közelítjük.

Mo. *a*) Legyen $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ monoton csökkenő függvény. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty. \qquad (\mathbf{5p})$$

b) Legyen

$$f(x) := \frac{1}{2x\ln^2(x)} \quad (x \geq 2) \quad (\mathbf{2p}).$$

Ekkor f nemnegatív, monoton csökkenő **(2p)** .

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_2^b \frac{1}{x} \cdot \ln^{-2}(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_{x=2}^b \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)} \right) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{2\ln(2)} \overset{(\mathbf{1p})}{<} +\infty,$$

tehát az integrálkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} f(n)$ konvergens **(2p)** .

Hibabecslés: Ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$\left| S - \sum_{n=2}^{99} f(n) \right| = \sum_{n=100}^{\infty} f(n) \overset{(\mathbf{2p})}{\leq} \int_{99}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{2\ln(99)}.$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 6n + 4}$$

összeget.
(Ha az összeg meghatározása nem sikerül, akkor legfeljebb **5 IMSc pontért** adjunk olyan $K_1 \in \mathbb{R}$ alsó és $K_2 \in \mathbb{R}$ felső becslést az összegre, amelyekre $K_2 - K_1 \leq 0{,}2$.)

Mo. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2n^2+6n+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\mathbf{3p}).$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\mathbf{5p})$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+6n+4} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2}.$$

Becslés részpontszámért: Egy 5 pontos megoldás például, ha kiszámoljuk "kézzel" az N-edik részletösszeget (pl. $N = 3$), és a maradékösszegre adunk a feladat szövegének megfelelő alsó és felső becslést egy improprius integrál segítségével.
