

1. feladat (16+6=22 pont)

a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{x^2 + 3x} \quad (x \neq 0, -3, y > 1)$$

b) Adjuk meg az összes olyan f számsorozatot, amelyre teljesül az

$$f(n) = \frac{4}{3}f(n-1) - \frac{1}{3}f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

lineáris rekurzió.

Mo. a) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{x^2 + 3x} \implies \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} dy = \int \frac{1}{x^2 + 3x} dx \quad (2p).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} dy = \operatorname{arch}(y) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (6p).$$

Az egyenlőség jobb oldala (parciális törtekre bontással):

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x} dx \stackrel{(4p)}{=} \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+3} dx \right) \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{3} (\ln|x| - \ln|x+3|) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\operatorname{arch}(y(x)) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

b) A lineáris rekurzióhoz tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0 \quad (2p),$$

amelynek gyökei: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ **(2p)**. Ebből a rekurzió általános megoldása:

$$f(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (2p).$$

2. feladat (20 pont)

Oldjuk meg az

$$\frac{y'}{x} = \frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{x^2} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

differenciálegyenletet az $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett. A megoldást explicit alakban adjuk meg.

Mo. Átrendezve:

$$y'(x) = \frac{x^3}{y^3(x)} + \frac{y(x)}{x} \quad (2\text{p}).$$

Legyen $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ (2p). Ekkor

$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \quad (1\text{p}),$$

tehát az új differenciálegyenlet:

$$u'(x) = \frac{1}{xu^3(x)} \quad (1\text{p}).$$

Szeparálható, a tanult módszerrel:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^3x} \implies \int u^3 du = \int \frac{1}{x} dx \quad (2\text{p}) \implies \frac{u^4(x)}{4} = \ln|x| + \tilde{C} \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R}) \quad (5\text{p}),$$

tehát az eredeti egyenlet megoldása:

$$y(x) = x \sqrt[4]{4 \ln|x| + C} \quad (4\text{p}).$$

A megadott kezdeti feltétel melletti megoldást jelölje \tilde{y} , ekkor:

$$\tilde{y}(1) = 1 \implies C = 1 \quad (1\text{p}) \implies \tilde{y}(x) = x \sqrt[4]{4 \ln(x) + 1} \quad (1\text{p}) \quad \left(x > \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) \quad (1\text{p}).$$

3. feladat (18 pont)

Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y''' + 3y'' = 18e^{3x}$$

Mo. Harmadrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0 \quad (2\text{p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -3$, (2p). Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,\acute{a}}(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{-3x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (4\text{p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük $y(x) = Ae^{3x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$) alakban (nincs rezonancia) (2p). Deriválva háromszor (3p):

$$\begin{array}{l} y(x) = Ae^{3x} \quad | \cdot 0 \\ y'(x) = 3Ae^{3x} \quad | \cdot 0 \\ y''(x) = 9Ae^{3x} \quad | \cdot 3 \\ y'''(x) = 27Ae^{3x} \quad | \cdot 1 \end{array}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$54Ae^{3x} = 18e^{3x} \implies A = \frac{1}{3} \quad (2\text{p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1\text{p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,\acute{a}}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,\acute{a}}(x) = \\ &= \frac{e^{3x}}{3} + C_1 + C_2x + C_3e^{-3x} \quad (x \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}) \quad (2\text{p}). \end{aligned}$$

4. feladat (7+7+8=22 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}} ne^{-n-1} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \arctg(n) \qquad c) \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{\cos(3^n)}{2^n}$$

Mo. a) Legyen $a_n := ne^{-n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \stackrel{(2\text{p})}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{e \sqrt[n]{e}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1 \quad (3\text{p}),$$

Tehát a gyökkritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ konvergens (2p).

b) Legyen $b_n := \arctg(n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \neq 0 \quad (1\text{p}),$$

azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ divergens (2p).

c) Legyen $c_n := (-1)^n \frac{\cos(3^n)}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|c_n| \leq \frac{1}{2^n} \quad (5\text{p}),$$

és $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ abszolút konvergens (2p) következésképpen konvergens (1p).

5. feladat (3+15=18 pont)

a) Mikor nevezünk egy numerikus sort feltételesen konvergensnek? (Írjuk le a definíciót.)

b) Divergens, abszolút konvergencia vagy feltételesen konvergencia a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} (-1)^n \frac{4n-2}{n^2+1}$$

sor?

Mo. a) Egy numerikus sort feltételesen konvergensnek nevezünk, ha konvergens és nem abszolút konvergens. **(3p)**

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := (-1)^n \frac{4n-2}{n^2+1}$. Ekkor

$$|a_n| \geq \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad \mathbf{(3p)},$$

és a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n}$ sor divergens, azaz a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor nem abszolút konvergens **(2p)**.

A $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor alternál **(1p)**, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ **(2p)**, illetve

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| \leq |a_n| &\Leftrightarrow \frac{4n+2}{(n+1)^2+1} \leq \frac{4n-2}{n^2+1} \\ &\Leftrightarrow (4n+2)(n^2+1) \leq (4n-2)(n^2+2n+2) \\ &\Leftrightarrow 4n^3+2n^2+4n+2 \leq 4n^3+6n^2+4n-4 \\ &\Leftrightarrow 6 \leq 4n^2 \Leftrightarrow n \geq 2 \quad \mathbf{(4p)}, \end{aligned}$$

azaz $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ egy küszöbindextől kezdve monoton csökkenő **(1p)**. A Leibniz-kritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sor konvergens **(1p)**, következésképpen feltételesen konvergens **(1p)**.

6. feladat (plusz 10 pontért)

Konvergens-e a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sor?

Mo. Sejtés: divergens, mert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, és a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n}$ sor divergens **(2p)**. Az előbbi határérték és az átviteli elv alapján **(2p)** legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2n} \quad \mathbf{(4p)}.$$

A $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2n}$ sor divergens, tehát a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sor is divergens **(2p)**.
