1. feladat (12+8 pont)
a) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{e^{-3y^2}\operatorname{ch}(3x)}{y}$$

b) Rajzoljuk fel az

$$y' = y^2 + 1 + x^2 - 2x$$

differenciálegyenlet $K_1 = 1$-hez és $K_2 = 9$-hez tartozó izoklináját, és jelöljünk be rajtuk egy-egy vonalelemet!

Mo. *a*) Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{-3y^2}\operatorname{ch}(3x)}{y} \quad \Longrightarrow \quad \int ye^{3y^2}\,\mathrm{d}y = \int \operatorname{ch}(3x)\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p})$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int ye^{3y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}e^{3y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \operatorname{ch}(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{sh}(3x) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$\frac{1}{2}e^{3y^2(x)} = \operatorname{sh}(3x) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

b) A $K_1 = 1$-hez tartozó izoklina egyenlete

$$y^2 + (x-1)^2 = 1$$

ami egy $(1,0)$ középpontú 1 sugarú körvonal. **(3p)** A vonalelemek 1 meredekségűek. **(1p)**

A $K_1 = 9$-hez tartozó izoklina egyenlete

$$y^2 + (x-1)^2 = 9$$

ami egy $(1,0)$ középpontú 3 sugarú körvonal. **(3p)** A vonalelemek 9 meredekségűek. **(1p)**

2. feladat (20 pont)
Az $u := y^5$ helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! (Explicit alakban adjuk meg az általános megoldást!)

$$5y^4y' + 2xy^5 = e^{-x^2}\ln(x) \quad (x > 0)$$

Mo. A helyettesítés után az egyenlet:

$$u' + 2xu = e^{-x^2}\ln(x) \quad (\mathbf{2p})$$

Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$u' + 2xu = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{h,á}(x) = Ce^{-x^2} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{6p})$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $u(x) = c(x)e^{-x^2}$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)e^{-x^2} - 2xc(x)e^{-x^2}}_{u'(x)} + \underbrace{2x \cdot c(x)e^{-x^2}}_{2xu(x)} = e^{-x^2}\ln(x) \quad (\mathbf{2p})$$

Ebből pedig $c'(x) = \ln(x)$. Parciális integrálással

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := x\ln(x) - x$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$u_{i,p}(x) = c(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}(\ln(x) - 1) \quad (\mathbf{1p})$$

Amiből az általános megoldás:

$$u_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} u_{i,p}(x) + u_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} xe^{-x^2}(\ln(x) - 1) + Ce^{-x^2} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+)$$

Visszahelyettesítve:

$$y(x) = \sqrt[5]{xe^{-x^2}(\ln(x) - 1) + Ce^{-x^2}} \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^+) \quad (\mathbf{2p})$$

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 6y' + 10y = 13\cos(x)$$

Mo. Harmadrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$, $(\mathbf{2p})$. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1 e^{3x}\sin(x) + C_2 e^{3x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = A\sin(x) + B\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p})$$

alakban keressük (nincs rezonancia). Deriválva kétszer $(\mathbf{2p})$:

$$\begin{aligned} y(x) &= A\sin(x) + B\cos(x) && | \cdot 10 \\ y'(x) &= A\cos(x) - B\sin(x) && | \cdot (-6) \\ y''(x) &= -A\sin(x) - B\cos(x) && | \cdot 1 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = (9A + 6B)\sin(x) + (-6A + 9B)\cos(x) = 13\cos(x) \quad (\mathbf{2p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = -\frac{2}{3},\ B = 1 \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = -\frac{2}{3}\sin(x) + \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p})$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= -\frac{2}{3}\sin(x) + \cos(x) + C_1 e^{3x}\sin(x) + C_2 e^{3x}\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}) \end{aligned}$$

4. feladat (7+7+7=21 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{\cos^{2n}(n^3)}{n^2} \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2+6^n}{n^2+1+3^{2n}}$$

Mo. *a*) Legyen $a_n := \frac{\cos^{2n}(n^3)}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

$$0 \overset{(\mathbf{1p})}{\leq} a_n \leq \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \quad (\mathbf{4p}),$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^2}$ numerikus sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} a_n$ konvergens **(1p)** .

b) Legyen $b_n := \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$b_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{e^3}{e^2} = e \neq 0 \quad (\mathbf{1p})$$

tehát nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ divergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{2+6^n}{n^2+1+3^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N})$.
Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$0 \leq c_n \leq \frac{2 \cdot 6^n}{9^n} \quad (\mathbf{4p})$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^n$ sor konvergens **(1p)** , tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ konvergens **(2p)** .

5. feladat (5+14=19 pont)
a) Mit mond ki az integrálkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{1}{n\ln^3(n)}$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét az $S_{99} = \sum_{n=2}^{99} \frac{1}{n\ln^3(n)}$ részletösszeggel közelítjük.

Mo. $a)$ Legyen $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ monoton csökkenő függvény. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty. \qquad \textbf{(5p)}$$

$b)$ Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x \ln^3(x)} \quad (x \geq 2) \quad (\textbf{2p}).$$

Ekkor f nemnegatív, monoton csökkenő **(2p)** .

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x} \cdot \ln^{-3}(x)\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2\ln^2(x)}\right]_{x=2}^{b} \overset{\textbf{(1p)}}{=}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2\ln^2(2)} - \frac{1}{2\ln^2(b)}\right) \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{1}{2\ln^2(2)} \overset{\textbf{(1p)}}{<} +\infty,$$

tehát az integrálkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} f(n)$ konvergens **(2p)** .

Hibabecslés: Ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$\left|S - \sum_{n=2}^{99} f(n)\right| = \sum_{n=100}^{\infty} f(n) \overset{\textbf{(2p)}}{\leq} \int_{99}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{1}{2\ln^2(99)}.$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 6n + 4}$$

összeget.
(Ha az összeg meghatározása nem sikerül, akkor legfeljebb **5 IMSc pontért** adjunk olyan $K_1 \in \mathbb{R}$ alsó és $K_2 \in \mathbb{R}$ felső becslést az összegre, amelyekre $K_2 - K_1 \leq 0{,}2$.)

Mo. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2n^2 + 6n + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\textbf{3p}).$$

Parciális törtekre bontással:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \textbf{(5p)}$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+6n+4} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2}.$$

Becslés részpontszámért: Egy 5 pontos megoldás például, ha kiszámoljuk "kézzel" az N-edik részletösszeget (pl. $N = 3$), és a maradékösszegre adunk a feladat szövegének megfelelő alsó és felső becslést egy improprius integrál segítségével.
