1. feladat (12 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az alábbi sor? Adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!}$$

Mo. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(3p)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+3}}{(2k+1)!} \overset{\textbf{(3p)}}{=} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \overset{\textbf{(6p)}}{=} x^2 \operatorname{sh}(x).$$

---

2. feladat (18 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(100)}(0)$ deriváltat!

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Mo.

$$\frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{(*)}{\overset{\textbf{(3p)}}{=}} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k \overset{\textbf{(2p)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 4^k}\binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k},$$

ahol a $(*)$ egyenlőség $|x| < 2$ esetén teljesül a binomiális sorfejtés alapján **(2p)**, tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 2 **(2p)**.

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_{2k} := \frac{1}{2\cdot 4^k}\binom{-\frac{1}{2}}{k}$ **(2p)**. Ekkor (az előadáson tanultak alapján)

$$f^{(100)}(0) = a_{100} \cdot 100! = \frac{1}{2\cdot 4^{50}}\binom{-\frac{1}{2}}{50} \cdot 100! \quad \textbf{(4p)}.$$

---

3. feladat (6+10=16 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \ln\left(1+x^2y^4\right)\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right).$$

a) Mit mond ki a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \operatorname{Dom}(f)'$ **(2p)** és $b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = b \iff \begin{array}{l} \underline{x}_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b \\ \forall (\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \operatorname{Dom}(f)\setminus\{\underline{a}\}\text{-ban halad.} \end{array} \qquad \textbf{(4p)}$$

b) Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(2p)** . Ekkor

$$f(x_k, y_k) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \underbrace{\ln\left(1 + x_k^2 y_k^4\right)}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_k^2 + 2y_k^6}\right)}_{\text{korlátos}} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

---

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 + 4y^3}{3x^4 + 2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Határozzuk meg f parciális deriváltjait $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f?

Mo. a) Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3x^2(3x^4 + 2y^2) - (x^3 + 4y^3)12x^3}{(3x^4 + 2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p})$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{12y^2(3x^4 + 2y^2) - (x^3 + 4y^3)4y}{(3x^4 + 2y^2)^2} \quad (\mathbf{2p}).$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)** :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^5} = +\infty,$$

azaz $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** ,

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{4y^3}{2y^3} = 2 \quad (\mathbf{2p}).$$

b) Az origóban nem differenciálható f, mert nem létezik az origóbeli első változó szerinti parciális deriváltja **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)** .

---

5. feladat (18+6+6=30 pont)
Legyen

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - 4xy \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

b) Számítsuk ki az f függvény $(-1,1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ irány menti deriváltját!

c) Határozzuk meg az f függvény $(-1,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Mo. a) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 4y \quad (\mathbf{1p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 4x \quad (\mathbf{1p})$$

$$\left.\begin{matrix} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{matrix}\right\} \quad (\mathbf{2p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(-1,-1)\} \quad (\mathbf{3p}),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti három pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)** . Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = H_f(-1,-1) \quad (\mathbf{3p}),$$

azaz $H_f(0,0)$ indefinit, $H_f(1,1) = H_f(-1,-1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(3p)** , következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f-nek, és az $(1,1)$ és $(-1,-1)$ pontokban pedig lokális minimuma van **(2p)** .

b) Az előző részben láttuk, hogy $\mathrm{grad} f(-1,1)$ létezik **(1p)** , ezért

$$D_{\underline{v}} f(-1,1) \overset{(\mathbf{2p})}{=} \langle \mathrm{grad} f(-1,1), \underline{v} \rangle \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left\langle (-8,8), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\rangle \overset{(\mathbf{1p})}{=} 0.$$

c) Az érintősík egy normálvektora:

$$(\partial_1(-1,1), \partial_2(-1,1), -1) = (-8,8,-1) \quad (\mathbf{2p}),$$

egy pontja:

$$(-1,1,f(-1,1)) = (-1,1,6) \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az érintősík egyenlete

$$-8(x+1) + 8(y-1) - (z-6) = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad 8x - 8y + z = 10) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

6. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

integrál értékét!

Mo.

$$H := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 2,\ \frac{y}{2} \le x \le 1\right\} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\right\}$$

H normáltartomány **(1p)** , tehát

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_H e^{x^2}\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=} \int_0^1 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=}$$

$$= \left[e^{x^2}\right]_{x=0}^1 \overset{\textbf{(1p)}}{=} e - 1.$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén az $\overset{-1}{f}\langle G\rangle := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in G\}$ is nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben! (Segítség: használjuk a nyíltság és a pontbeli folytonosság definícióját.)

Mo. Legyen $\underline{a} \in \overset{-1}{f}\langle G\rangle$; megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy $B_\delta(\underline{a}) \subseteq G$ **(3p)** . Mivel $f(\underline{a}) \in G$ és G nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$]f(\underline{a}) - \varepsilon, f(\underline{a}) + \varepsilon[\, \subseteq G \quad \textbf{(4p)}.$$

Az f függvény $\underline{a}$-beli folytonossága miatt létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ és $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ esetén

$$f(\underline{x}) \in\,]f(\underline{a}) - \varepsilon, f(\underline{a}) + \varepsilon[\, \subseteq G \quad \textbf{(5p)},$$

azaz $\underline{x} \in B_\delta(\underline{a})$ esetén $\underline{x} \in \overset{-1}{f}\langle G\rangle$ teljesül **(3p)** .
