1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+2n}{n!}x^n \qquad\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{9^n}(x+1)^{2n}$$

Mo. *a*) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := \dfrac{n^2+2n}{n!}$. Ekkor

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+1)^2+2(n+1)}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^2+2n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{(n+1)^2+2n+2}{(n^2+2n)(n+1)} \xrightarrow[(\mathbf{3p})]{n\to\infty} 0,$$

azaz a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$ **(2p)** , tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens **(1p)** .

b) Legyen $u := (x+1)^2$ **(2p)** , és vizsgáljuk a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{9^n}u^n$ sor konvergenciáját. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $b_n := \dfrac{n}{9^n}$. Mivel

$$\sqrt[n]{b_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{9} \xrightarrow[(\mathbf{2p})]{n\to\infty} \frac{1}{9},$$

ezért $R_b = 9$ **(1p)** , tehát az eredeti sor $|x+1| < 3$ esetén konvergens, $x = -4, 2$ esetén pedig divergens **(2p)** , azaz pontosan akkor konvergens ha $x \in]-4, 2[$ **(1p)** .

---

2. feladat (10+13=23 pont)

a) Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = -1$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.

$$f(x) := \frac{1}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$$

b) Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrandus 0 középpontú tizenkettedfokú Taylor-polinomjának integrálja segítségével.

Mo. *a*)

$$f(x) \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{1-(-(x+1))} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n,$$

ahol az utolsó egyenlőség $|x+1| < 1$ esetén teljesül **(2p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 1 **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \sin(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} \quad (\mathbf{4p}),$$

tehát (mivel az n-edrendű Taylor-polinom a Taylor-sor n-edik részletösszege) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T^f_{0,12}(x) = x^3 - \frac{x^9}{6} \quad (\mathbf{5p}),$$

következésképpen

$$\int_0^1 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 T^f_{0,12}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 - \frac{x^9}{6}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{60}\right]_{x=0}^{1} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{7}{30}.$$

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki a folytonosságra vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) Folytonos-e az alábbi függvény?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^4+3y^4} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ **(2p)** . Ekkor

$$f \text{ folytonos } \underline{a}\text{-ban} \iff \begin{array}{l} \underline{x}_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(\underline{a}) \\ \forall (\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \mathrm{Dom}(f)\text{-ben halad.} \end{array} \qquad \textbf{(4p)}$$

b) Mivel $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(1p)** és

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \quad \textbf{(3p)},$$

az átviteli elv alapján f nem folytonos az origóban **(2p)** , tehát nem folytonos **(1p)** .

---

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)+y}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

Mo. *a)* Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y\cos(xy)(x^2+2y^2) - (\sin(xy)+y)2x}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{(x\cos(xy)+1)(x^2+2y^2) - (\sin(xy)+y)4y}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 \quad \textbf{(2p)},$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{2y^3} = +\infty \quad \textbf{(2p)},$$

tehát $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

b) Az origóban nem differenciálható f, mert $\partial_2 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .

5. feladat (13+8+6=27 pont)
Legyen

$$f(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 7 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki f origóbeli iránymenti deriváltjainak maximumát, és adjuk meg azt a vektort, amely mentén maximális az iránymenti derivált.

c) Határozzuk meg az f függvény $(0,0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

Mo. a) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 4x - 2y - 4 \quad \textbf{(1p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = 4y - 2x - 4 \quad \textbf{(1p)}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 2y &= 4 \\ -2x + 4y &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2p)} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (2,2) \quad \textbf{(3p)},$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2p)},$$

azaz $H_f(2,2)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)**, tehát f-nek a $(2,2)$ pontban lokális minimuma van **(2p)**.

b) Az f függvény differenciálható az origóban, ezért az origóbeli iránymenti deriváltak maximuma $\|\mathrm{grad} f(0,0)\|$ **(2p)** , azaz

$$\|\mathrm{grad} f(0,0)\| \overset{\textbf{(2p)}}{=} \|(-4,-4)\| \overset{\textbf{(2p)}}{=} 4\sqrt{2},$$

és a pontbeli gradiens irányában vétetik fel a maximum, vagyis az $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ vektoron **(2p)** .

c) Az érintősík egy normálvektora:

$$(\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0), -1) = (-4,-4,-1) \quad \textbf{(2p)},$$

egy pontja:

$$(0,0,f(0,0)) = (0,0,7) \quad \textbf{(2p)},$$

tehát az érintősík egyenlete

$$-4x - 4y - z + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 4y + z = 7 \quad \textbf{(2p)}.$$

---

6. feladat (plusz 10 pontért)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n + n^2 x^9}\,\mathrm{d}x = ?$$

(Indokoljunk.)

Mo. Legyen $f_n(x) := \frac{x}{n+n^2x^9} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$ **(1p)** . Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$ **(1p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \quad \textbf{(3p)},$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon **(2p)**, így a tanultak alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n+n^2x^9}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+n^2x^9}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=} 0.$$
