1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok?

a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+3n}{n!}x^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{4^n}(x+2)^{2n}$

Mo. *a)* Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $a_n := \dfrac{n^2+3n}{n!}$. Ekkor

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{(n+1)^2+3(n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2+3n} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{(n+1)^2+3n+3}{(n^2+3n)(n+1)} \underset{\textbf{(3p)}}{\xrightarrow{n\to\infty}} 0,$$

azaz a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$ **(2p)** , tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens **(1p)** .

b) Legyen $u := (x+2)^2$ **(2p)** , és vizsgáljuk a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{4^n}u^n$ sor konvergenciáját. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $b_n := \dfrac{n}{4^n}$. Mivel

$$\sqrt[n]{b_n} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{\sqrt[n]{n}}{4} \underset{\textbf{(2p)}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \frac{1}{4},$$

ezért $R_b = 4$ **(1p)** , tehát az eredeti sor $|x+2| < 2$ esetén konvergens, $x = -4, 0$ esetén pedig divergens **(2p)** , azaz pontosan akkor konvergens ha $x \in]-4, 0[$ **(1p)** .

---

2. feladat (10+13=23 pont)

a) Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = -2$ középpontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.

$$f(x) := \frac{1}{x+3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$$

b) Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \cos(x^3)\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékét az integrandus 0 középpontú tizedfokú Taylor-polinomjának integrálja segítségével.

Mo. *a)*

$$f(x) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \frac{1}{1-(-(x+2))} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n,$$

ahol az utolsó egyenlőség $|x+2| < 1$ esetén teljesül **(2p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 1 **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) := \cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n}}{(2n)!} \quad \textbf{(4p)},$$

tehát (mivel az n-edrendű Taylor-polinom a Taylor-sor n-edik részletösszege) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$T_{0,10}^f(x) = 1 - \frac{x^6}{2} \quad \textbf{(5p)},$$

következésképpen

$$\int_0^1 \cos(x^3)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 T_{0,10}^f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{x^6}{2}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \left[x - \frac{x^7}{14}\right]_{x=0}^1 \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{13}{14}.$$

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki a folytonosságra vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b) Folytonos-e az alábbi függvény?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y}{2x^4+3y^4} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ **(2p)** . Ekkor

$$f \text{ folytonos } \underline{a}\text{-ban} \iff \begin{array}{l} \underline{x_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(\underline{a}) \\ \forall(\underline{x_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \mathrm{Dom}(f)\text{-ben halad.} \end{array} \qquad \textbf{(4p)}$$

b) Mivel $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(1p)** és

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{1}{5} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{5} \neq 0 = f(0,0) \quad \textbf{(3p)},$$

az átviteli elv alapján f nem folytonos az origóban **(2p)** , tehát nem folytonos **(1p)** .

---

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)+x}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

Mo. *a*) Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{(y\cos(xy)+1)(x^2+2y^2) - (\sin(xy)+x)2x}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{x\cos(xy)(x^2+2y^2) - (\sin(xy)+x)4y}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{x}{x^3} = +\infty \quad \textbf{(2p)},$$

tehát $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** ,

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y} = 0 \quad \textbf{(2p)}.$$

b) Az origóban nem differenciálható f, mert $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .

---

5. feladat (13+8+6=27 pont)
Legyen

$$f(x,y) := 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y + 5 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki f origóbeli iránymenti deriváltjainak maximumát, és adjuk meg azt a vektort, amely mentén maximális az iránymenti derivált.

c) Határozzuk meg az f függvény $(0,0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

Mo. a) Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 4x - 4y - 4 \quad \textbf{(1p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = 10y - 4x - 2 \quad \textbf{(1p)}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 4y &= 4 \\ -4x + 10y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2p)} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (2,1) \quad \textbf{(3p)},$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2p)},$$

azaz $H_f(2,2)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)**, tehát f-nek a $(2,1)$ pontban lokális minimuma van **(2p)**.

b) Az f függvény differenciálható az origóban, ezért az origóbeli iránymenti deriváltak maximuma $\|\mathrm{grad} f(0,0)\|$ **(2p)** , azaz

$$\|\mathrm{grad} f(0,0)\| \overset{\textbf{(2p)}}{=} \|(-4,-2)\| \overset{\textbf{(2p)}}{=} 2\sqrt{5},$$

és a pontbeli gradiens irányában vétetik fel a maximum, vagyis az $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)$ vektoron **(2p)** .

c) Az érintősík egy normálvektora:

$$(\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0), -1) = (-4,-2,-1) \quad \textbf{(2p)},$$

egy pontja:

$$(0,0,f(0,0)) = (0,0,5) \quad \textbf{(2p)},$$

tehát az érintősík egyenlete

$$-4x - 2y - z + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 2y + z = 5 \quad \textbf{(2p)}.$$

---

6. feladat (plusz 10 pontért)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n + n^2x^9}\,\mathrm{d}x = ?$$

(Indokoljunk.)

Mo. Legyen $f_n(x) := \frac{x}{n+n^2x^9} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$ **(1p)** . Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$ **(1p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \le \frac{1}{n} \quad \textbf{(3p)},$$

tehát az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon **(2p)**, így a tanultak alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x}{n+n^2x^9}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+n^2x^9}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=} 0.$$
