

*** 1. feladat (15 pont)**

Integráljuk az $f(x, y, z) := \frac{y}{x^2 + y^2}$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, z \in \mathbb{R})$ függvényt a

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

halmazon.

Mo. Gömbi koordinátákkal **(2p)** ($H = \underline{S}([1, 3] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}])$):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(3p)}{=} \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\varphi \, d\theta \, dr \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin(\varphi) \sin(\theta)}{r^2 \sin^2(\theta)} \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\varphi \, d\theta \, dr \stackrel{(1p)}{=} \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin(\varphi) \, d\varphi \, d\theta \, dr \stackrel{(4p)}{=} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^3 r \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) \, d\varphi \stackrel{(2p)}{=} \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=1}^3 \cdot [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(2p)}{=} 2\pi. \end{aligned}$$

*** 2. feladat (6+6+5=17 pont)**

Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} -x & , \text{ ha } x \in [-\pi, 0[\\ \pi - x & , \text{ ha } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

- Mondjuk ki a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról szóló Dirichlet-tételt.
- Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(-\frac{\pi}{2})$ értékeket, és rajzoljuk fel Φ grafikonját.
- Számítsuk ki az $a_5(f)$ Fourier-együtthatót.

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, és tegyük fel, hogy $[-\pi, \pi]$ felbontható úgy véges sok részintervallumra, hogy ezek belsején f monoton és korlátos **(2p)**. Ekkor f Fourier-sora minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens **(2p)**, és

$$(\Phi(f))(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (2p).$$

b) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei **(1p)**, ezért

$$\Phi(0) \stackrel{(1p)}{=} \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(1p)}{=} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

+ rajz **(3p)**.

c)

$$a_5(f) \stackrel{(2p)}{=} a_5\left(f - \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{(1p)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}\right) \cos(5x) \, dx \stackrel{(1p)}{=} 0$$

ahol az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert az integrandus véges sok pont kivételével páratlan **(1p)**.

3. feladat (6+12 pont)

Mondjuk ki és bizonyítsuk be az iránymenti deriváltak kiszámításáról szóló tételt.

Mo. Tétel: Ha az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \text{int}(\text{Dom}(f))$ pontban **(2p)**, akkor minden $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$ és $\|\underline{e}\| = 1$ esetén f az \underline{e} irány mentén deriválható az \underline{a} pontban **(2p)**, és

$$D_{\underline{e}}f(\underline{a}) = \langle \text{grad}f(\underline{a}), \underline{e} \rangle \quad \mathbf{(2p)}$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amely (totálisan) differenciálható az $\underline{a} \in \text{int}(\text{Dom}(f))$ pontban, valamint legyen $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$, amelyre $\|\underline{e}\| = 1$ teljesül, illetve $\varepsilon > 0$ tetszőleges **(1p)**. Ekkor az f függvény \underline{a} pontbeli totális differenciálhatóságából adódóan létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ és $\underline{x} \neq \underline{a}$ esetén

$$\left| \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \text{grad}f(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} \right| < \varepsilon. \quad \mathbf{(4p)}$$

Legyen $0 < t < \delta$. Az előbbi egyenlőtlenség $\underline{x} := \underline{a} + t \cdot \underline{e}$ esetén is teljesül, hiszen $\|\underline{a} + t \cdot \underline{e} - \underline{a}\| = |t| < \delta$, tehát

$$\left| \frac{f(\underline{a} + t \cdot \underline{e}) - f(\underline{a}) - \langle \text{grad}f(\underline{a}), t \cdot \underline{e} \rangle}{t} \right| = \left| \frac{f(\underline{a} + t \cdot \underline{e}) - f(\underline{a})}{t} - \langle \text{grad}f(\underline{a}), \underline{e} \rangle \right| < \varepsilon. \quad \mathbf{(4p)}$$

Ez pedig a pontbeli határérték és az iránymenti derivált definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$D_{\underline{e}}f(\underline{a}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\underline{a} + t \cdot \underline{e}) - f(\underline{a})}{t} = \langle \text{grad}f(\underline{a}), \underline{e} \rangle. \quad \mathbf{(3p)}$$

(Alternatív bizonyítás: átviteli elv segítségével...)

4. feladat (plusz 10 pontért)

Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos függvény és $a < b$ valós számok, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} \, dx \geq (b - a)^2.$$

(Segítség: Szorozzuk a fenti egyenlőtlenséget 2-vel, a bal oldalt alakítsuk át kettős integrállá kétféleléppen, majd összevonás után becsljük alulról.)

Mo. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Ekkor a Fubini-tétel és a Riemann-integrál monotinitása alapján

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} \, dx &\stackrel{\mathbf{(3p)}}{=} \int_a^b \int_a^b \frac{f(x)}{f(y)} \, dy \, dx + \int_a^b \int_a^b \frac{f(y)}{f(x)} \, dy \, dx \stackrel{\mathbf{(3p)}}{=} \int_{[a,b] \times [a,b]} \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \, d(x, y) \stackrel{\mathbf{(2p)}}{\geq} \\ &\geq \int_{[a,b] \times [a,b]} 2 \, d(x, y) \stackrel{\mathbf{(2p)}}{=} 2(b - a)^2, \end{aligned}$$

amiből már adódik a feladat állítása.