*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)
$$f(x,y) := 2x^2y \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$
H pedig az első síknegyed ($x \geq 0$, $y \geq 0$) azon korlátos részhalmaza, amelyet koordinátatengelyek és az $y^2 = 1 - x$ egyenletű parabola határolnak;

b)
$$f(x,y) := (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right),$$
$$H := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

Mo. *a) 1. megoldás.*
$$H = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{1-x}\right\}, \quad (\mathbf{1p}).$$
H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)** , tehát:
$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1\int\limits_0^{\sqrt{1-x}} 2x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1 \left[x^2y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^1 \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{12}.$$
2. megoldás. $$H = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq 1-y^2\right\}, \quad (\mathbf{1p}).$$
H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)** , tehát:
$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1\int\limits_0^{1-y^2} 2x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{(\mathbf{2p})}{=} 2\int\limits_0^1 \left[\frac{x^3y}{3}\right]_{x=0}^{1-y^2}\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} -\frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-y^2)^3\cdot(-2y)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} -\frac{1}{3}\left[\frac{(1-y^2)^4}{4}\right]_{y=0}^1 \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{12}.$$
b) Polártranszformációval, $H = \underline{P}\langle[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\rangle$ **(1p)**
$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{3p})}{=} \int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} 2\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} r^4\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{\pi}{3}\int\limits_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\pi}{3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^1 \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{\pi}{15}.$$
(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az
$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(2x+1))$$
Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltja segítségével.

Mo. Minden $\omega\in\mathbb{R}$ esetén
$$\mathscr{F}(f')(\omega) = \mathbf{i}\omega\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad (\mathbf{3p})$$
$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(x+1))(\omega) = e^{\mathbf{i}\omega}\mathbf{i}\omega\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad (\mathbf{3p})$$
$$\mathscr{F}(x\mapsto f'(2x+1))(\omega) = e^{\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathbf{i}\frac{\omega}{4}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (\mathbf{4p})$$

Megjegyzés: Alternatív megoldásként szóba jöhet az $\mathscr{F}(x\mapsto g(2x+1))$ kiszámítása definíció segítségével majd ennek alkalmazása $g=f'$-re, illetve a lépések más sorrendben való elvégzése.
Minden elvi hibáért 3 pont levonás jár. Ha pl. a vizsgázó $\mathscr{F}(x\mapsto f(2x+1))(\omega)$-ról tér át $\mathscr{F}(x\mapsto f'(2x+1))(\omega)$-ra úgy, "elfelejt" 2-vel osztani, csak $\mathbf{i}\omega$-val szoroz, az elvi hibának számít.
A Fourier transzformált definíciójának helyes felírásáért csak akkor jár pont (legfeljebb egy), ha a vizsgázó kezd is vele valamit.

---

3. feladat (6+10=16 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be a hatvány(függvény-)sorok abszolút és egyenletes konvergenciájáról szóló tételt.

Mo. *Tétel:* Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat, és $x_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\mathrm{id}_\mathbb{R} - x_0)^n$ hatványfüggvény-sor abszolút konvergens az $]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ halmazon **(3p)** , és minden $\alpha, \beta \in]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ és $\alpha < \beta$ esetén egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ intervallumon **(3p)** .

Bizonyítás: A hatványfüggvény-sor $]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ halmazon való abszolút konvergenciája következik a Cauchy – Hadamard-tételből **(2p)** .
Legyen $\alpha, \beta \in]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ és $\alpha < \beta$, továbbá

$$\gamma := \max\{|\alpha - x_0|, |\beta - x_0|\} \quad (\mathbf{2p}).$$

Ekkor minden $x \in [\alpha, \beta]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n|\gamma^n \quad \Rightarrow \quad \|a_n(\mathrm{id}_\mathbb{R} - x_0)^n\|_{[\alpha,\beta]} \leq |a_n|\gamma^n \quad (\mathbf{3p}),$$

és a gyökkritérium (vagy a Cauchy – Hadamard-tétel) alapján a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\gamma^n$ numerikus sor konvergens **(1p)** , így a Weierstrass-kritérium **(1p)** szerint a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\mathrm{id}_\mathbb{R} - x_0)^n$ hatványfüggvény-sor egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ intervallumon **(1p)** .

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & , \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Folytonos-e az f függvény? (Tanács: polárkoordináták helyett inkább próbáljunk ügyesen felülről becsülni.)

Mo. Az origóbeli folytonosság fogja eldönteni a kérdést **(1p)** , ahhoz pedig elég az origóbeli határértéket vizsgálni. Legyen $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amely tart az origóhoz.

Ekkor

$$|f(x_k, y_k)| \overset{(\mathbf{2p})}{=} |x_k| \frac{x_k^2|y_k|}{x_k^4 + y_k^2} \overset{(\mathbf{5p})}{\leq} |x_k| \frac{x_k^4 + y_k^2}{2(x_k^4 + y_k^2)} = \frac{|x_k|^2}{2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\mathbf{1p})$$

Ebből adódóan $f(x_k, y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, azaz az átviteli elv (valamint a határérték és folytonosság kapcsolatáról szóló tétel alapján) f folytonos az origóban **(1p)** , és az értelmezési tartományának minden más pontjában is, tehát folytonos.

Megjegyzés: Origón átmenő egyenesek mentén való próbálkozásért nem jár pont, polárkoordinátás helyettesítésért pedig csak akkor, ha vezet valahova.
