2024.06.11.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{|y|} = ?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Azon legalacsonyabbrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet rendje, amelynek megoldása az $y(x) := \sin(2x) + x^4 e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény:

□ 3; □ 4; □ 5; □ 6; ■ 7; □ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, és jelölje D az origó középpontú 2 sugarú zárt körlapot.

■ Az f függvénynek létezik maximuma és minimuma a D halmazon;

□ Az f függvénynek nem létezik maximuma a D halmazon, minimuma viszont igen, amit az origóban vesz fel;

□ Az f függvénynek se maximuma se mimuma nem létezik a D halmazon.

□ A fenti állítások közül egyik sem igaz.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n (x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!} = ? \quad (x \in \mathbb{R})$

□ $\mathrm{sh}(2x+2)$; □ $2(x+1)\,\mathrm{sh}(x+1)$; □ $\dfrac{2^n\,\mathrm{ch}(x+1)}{(x+1)^2(2n+1)}$;

■ $\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{2}(x+1)\right)$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Az $f(n) = -\frac{3}{2} f(n-1) + f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ lineáris rekurziónak

a) létezik $+\infty$-hez tartó megoldása; □ I; ■ H;
b) létezik divergens megoldása; ■ I; □ H;
c) létezik 0-tól különböző konstans megoldása. □ I; ■ H;

6. Legyen $f(x,y) = |x| \cdot y^3$, a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett függvény.

f folytonos az origóban. ■ I; □ H;
f-nek lokális szélsőértéke van az origóban. □ I; ■ H;
f-nek léteznek a parciális deriváltjai az origóban. ■ I; □ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens. □ I; ■ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor divergens. ■ I; □ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{(-1)^n}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor feltételesen konvergens. □ I; ■ H;

Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus divergens. ■ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

1, $$\frac{\sin(xy)}{|y|} = \underbrace{\frac{\sin(xy)}{xy}}_{\downarrow\ 1} \cdot \underbrace{\frac{y}{|y|}}_{\text{korlátos } (=\pm 1)} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow\ 0} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

2, $$y_{H,\text{ált}}(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 x^2 e^x + C_6 x^3 e^x + C_{\boxed{7}} x^4 e^x$$

3, D korlátos, zárt $\Rightarrow$ D kompakt $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ $\xrightarrow{\text{Weierstrass tétel}}$ f felveszi szélsőértékeit D-n
f folytonos D-n

4, $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!} = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}(x+1))^{2n+1}}{(2n+1)!} = \underline{\frac{x+1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh}(\sqrt{2}(x+1))}$$

5, $$q^n = -\frac{3}{2} q^{n-1} + q^{n-2} \Rightarrow q^2 + \frac{3}{2} q - 1 = 0$$

$$q_{12} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

$$f_{\text{ált}}(n) = A \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\downarrow\ 0} + B \underbrace{(-2)^n}_{\text{divergens}} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

$\nexists$ $+\infty$-hez tartó megoldás
$\exists$ divergens megoldás $(B \neq 0)$
$\nexists$ 0-tól különböző konstans megoldás

6, $f(x,y) = |x| \cdot y^3 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ folytonos $(0,0)$-ban.

Ha $x \neq 0$, $y > 0 \Rightarrow f(x,y) > 0$
Ha $x \neq 0$, $y < 0 \Rightarrow f(x,y) < 0$ $\Big\} \Rightarrow$ nincs lok. szél. érték $(0,0)$-ban

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0;$$ hasonlóan $\exists f'_y(0,0) = 0$

7, a, $0 \le a_n \le \frac{1}{n^2}$ mellett igaz, így hamis.

Pl.: $a_n = -1$ ellenpélda

b, $\sum_n \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow$ minoráns krit. szerint igaz az állítás

c, Hamis, ellenpélda: $a_n = -1$.

d, $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1 \Rightarrow |a_n| \ge 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergens

Igaz

2024.06.11.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ☐, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] (4 × 5 = 20 pont)

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} = ?$

■ 0; ☐ 1; ☐ -1; ☐ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Azon legalacsonyabbrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet rendje, amelynek megoldása az $y(x) := x\sin(2x) + xe^x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény:

☐ 3; ☐ 4; ☐ 5; ■ 6; ☐ 7; ☐ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

és jelölje D az origó középpontú 1 sugarú zárt körlapot.

☐ Az f függvénynek létezik maximuma és minimuma a D halmazon;

■ Az f függvénynek nem létezik maximuma a D halmazon, minimuma viszont igen, amit az origóban vesz fel;

☐ Az f függvénynek se maximuma se mimuma nem létezik a D halmazon.

☐ A fenti állítások közül egyik sem igaz.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x+1)^{2n+1}}{(2n)!} = ? \quad (x \in \mathbb{R})$

☐ $\mathrm{ch}(3x+3)$; ☐ $3(x+1)\,\mathrm{ch}(x+1)$; ■ $(x+1)\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{3}(x+1)\right)$; ☐ $\dfrac{3^n\,\mathrm{sh}(x+1)}{2n+1}$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] (10 × 3 = 30 pont)

5. Az $f(n) = \frac{5}{2}f(n-1) + \frac{3}{2}f(n-2) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ lineáris rekurziónak

a) létezik $+\infty$-hez tartó megoldása; ■ I; ☐ H;
b) nincs konvergens megoldása; ☐ I; ■ H;
c) létezik konstans megoldása. ■ I; ☐ H;

6. Legyen $f(x,y) = x^2 \cdot |y|$, a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett függvény.

f folytonos az origóban. ■ I; ☐ H;
f-nek lokális szélsőértéke van az origóban. ■ I; ☐ H;
f-nek nem létezik minden parciális deriváltja az origóban. ☐ I; ■ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens. ☐ I; ■ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor divergens. ■ I; ☐ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq \dfrac{1}{n}$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor feltételesen konvergens. ☐ I; ■ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus konvergens. ☐ I; ■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

1, $\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} = \underbrace{\dfrac{\sin(xy)}{xy}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\sqrt{|xy|}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\overset{\text{előjel fgv.}}{\operatorname{sgn}(xy)}}_{=\pm 1,\ \text{korlátos}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

2, $y_{H,ált}(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + C_3 x \sin(2x) + C_4 x \cos(2x) + C_5 e^x + C_{\boxed{6}} x e^x$

3, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$, így $\nexists$ f-nek maximuma D-n.

De $f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \Rightarrow \exists$ minimuma.

4, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n (x+1)^{2n+1}}{(2n)!} = (x+1) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{3}(x+1))^{2n}}{(2n)!} = \underline{(x+1)\operatorname{ch}(\sqrt{3}(x+1))}$

5, $q^n = \frac{5}{2} q^{n-1} + \frac{3}{2} \Rightarrow q^2 - \frac{5}{2} q - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4} = \begin{cases} +3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$f_{ált}(n) = A \cdot \underbrace{3^n}_{\downarrow\, +\infty} + B \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_{\downarrow\, 0}$

a, $f(n) \to \infty \iff A > 0$

b, $A = 0 \Rightarrow f(n) \to 0$ (konvergens)

c, $A = B = 0 \Rightarrow f(n) = 0$ konstans

6, $f(x,y) = x^2 |y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ folytonos az origóban

$f(x,y) \geq 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0)$-ban globális (így lokális) minimuma van.

$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ (α-hoz hasonlóan a def. alapján)

7, a, b, – mint az α változat

c, d, hamis, ellenpélda: $a_n = \frac{1}{2n}$