

*** 1. feladat (12+12=24 pont)**

Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol

a)

$$f(x, y) := 2x^3y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

H pedig a negyedik síknegyed ($x \geq 0, y \leq 0$) azon korlátos részhalmaza, amelyet koordinátatengelyek és az $y^2 = 1 - x$ egyenletű parabola határolnak;

b)

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq \sqrt{3}x \leq y\}.$$

Mo. a) 1. megoldás.

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x} \leq y \leq 0\} \quad (1\text{p}).$$

H normáltartomány, f folytonos H -n (1p), tehát:

$$\int_H f \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^0 2x^3y \, dy \, dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^1 [x^3y^2]_{y=-\sqrt{1-x}}^0 \, dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^1 x^3(x-1) \, dx \stackrel{(2\text{p})}{=} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^1 \stackrel{(2\text{p})}{=} -\frac{1}{20}.$$

2. megoldás. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 1 - y^2\}$ (1p). H normáltartomány, f folytonos H -n (1p), tehát:

$$\int_H f \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_{-1}^0 \int_0^{1-y^2} 2x^3y \, dx \, dy \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_{-1}^0 \left[\frac{x^4y}{2} \right]_{x=0}^{1-y^2} \, dy \stackrel{(2\text{p})}{=} \frac{1}{4} \int_{-1}^0 (y^2 - 1)^4 \cdot 2y \, dy \stackrel{(2\text{p})}{=} \frac{1}{4} \left[\frac{(y^2 - 1)^5}{5} \right]_{y=-1}^0 \stackrel{(2\text{p})}{=} -\frac{1}{20}.$$

b) Polártranszformációval, $H = \underline{P}\langle [0, 1] \times [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \rangle$ (1p)

$$\int_H f \stackrel{(3\text{p})}{=} \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cdot r \, d\varphi \, dr \stackrel{(2\text{p})}{=} \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \, d\varphi \, dr \stackrel{(3\text{p})}{=} \frac{\pi}{6} \int_0^2 r^2 \, dr \stackrel{(2\text{p})}{=} \frac{\pi}{6} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^2 \stackrel{(1\text{p})}{=} \frac{4\pi}{9}.$$

(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

*** 2. feladat (10 pont)**

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathcal{F}(x \mapsto f'(3x - 1))$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltja segítségével.

Mo. Minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) \quad (3\text{p})$$

$$\mathcal{F}(x \mapsto f'(x - 1))(\omega) = e^{-i\omega} i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) \quad (3\text{p})$$

$$\mathcal{F}(x \mapsto f'(3x - 1))(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{3}} i\frac{\omega}{9} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{3}\right) \quad (4\text{p})$$

Megjegyzés: Alternatív megoldásként szóba jöhet az $\mathcal{F}(x \mapsto g(3x - 1))$ kiszámítása definíció segítségével majd ennek alkalmazása $g = f'$ -re, illetve a lépések más sorrendben való elvégzése.

Minden elvi hibáért 3 pont levonás jár. Ha pl. a vizsgázó $\mathcal{F}(x \mapsto f(3x - 1))(\omega)$ -ról tér át $\mathcal{F}(x \mapsto f'(3x - 1))(\omega)$ -ra úgy, "elfelejt" 3-mal osztani, csak $i\omega$ -val szoroz, az elvi hibának számít.

A Fourier transzformált definíciójának helyes felírásáért csak akkor jár pont (legfeljebb egy), ha a vizsgázó kezd is vele valamit.

3. feladat (6+10=16 pont)

Mondjuk ki és bizonyítsuk be a hatvány(függvény-)sorok abszolút és egyenletes konvergenciájáról szóló tételt.

Mo. Tétel: Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat, és $x_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(\text{id}_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ hatványfüggvény-sor abszolút konvergens az $]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ halmazon **(3p)**, és minden $\alpha, \beta \in]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ és $\alpha < \beta$ esetén egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ intervallumon **(3p)**.

Bizonyítás: A hatványfüggvény-sor $]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ halmazon való abszolút konvergenciája következik a Cauchy–Hadamard-tételből **(2p)**.

Legyen $\alpha, \beta \in]x_0 - R_a, x_0 + R_a[$ és $\alpha < \beta$, továbbá

$$\gamma := \max\{|\alpha - x_0|, |\beta - x_0|\} \quad \text{(2p)}.$$

Ekkor minden $x \in [\alpha, \beta]$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n|\gamma^n \Rightarrow \|a_n(\text{id}_{\mathbb{R}} - x_0)^n\|_{[\alpha, \beta]} \leq |a_n|\gamma^n \quad \text{(3p)},$$

és a gyökkritérium (vagy a Cauchy–Hadamard-tétel) alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|\gamma^n$ numerikus sor konvergens **(1p)**, így a Weierstrass-kritérium **(1p)** szerint a $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(\text{id}_{\mathbb{R}} - x_0)^n$ hatványfüggvény-sor egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ intervallumon **(1p)**.

4. feladat (plusz 10 pontért)

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Folytonos-e az f függvény? (Tanács: polárkoordináták helyett inkább próbáljunk ügyesen felülről becsülni.)

Mo. Az origóbeli folytonosság fogja eldönteni a kérdést **(1p)**, ahhoz pedig elég az origóbeli határértéket vizsgálni. Legyen $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ -ban haladó sorozat, amely tart az origóhoz.

Ekkor

$$|f(x_k, y_k)| \stackrel{\text{(2p)}}{=} |x_k| \frac{x_k^2 |y_k|}{x_k^4 + y_k^2} \stackrel{\text{(5p)}}{\leq} |x_k| \frac{x_k^4 + y_k^2}{2(x_k^4 + y_k^2)} = \frac{|x_k|^2}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{(1p)}$$

Ebből adódóan $f(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, azaz az átviteli elv (valamint a határérték és folytonosság kapcsolatáról szóló tétel alapján) f folytonos az origóban **(1p)**, és az értelmezési tartományának minden más pontjában is, tehát folytonos.

Megjegyzés: Origón átmenő egyenesek mentén való próbálkozásért nem jár pont, polárkoordinátás helyettesítésért pedig csak akkor, ha vezet valahova.