2024.06.18.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = ?$

□ 0; □ 1; □ -1; ■ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'' + 4y' + 4y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y_á(x) = \dots$ $\quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$

□ $C_1 e^{2x}$; □ $C_1 e^{-2x}$; □ $C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$;
□ $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; ■ $C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$; □ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma és lokális minimuma is;
■ Az f függvénynek nem létezik lokális maximuma, és létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma, és nem létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek nem létezik lokális szélsőértéke.

4. A $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(-2)^n n^3}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in \dots$

□ $]-2,2]$; ■ $[-2,2]$; □ $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; □ $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Az $y'(x)x^3 - 2y^2(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

szeparálható;	■ I;	□ H;
megoldása az $x \mapsto x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény;	■ I;	□ H;
$K = 0$-hoz tatozó izoklinája tartalmazza az $(1,1)$ pontot.	□ I;	■ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény.

Ha f (totálisan) deriválható egy (x_0, y_0) pontban, akkor ott minden esetben folytonos is.	■ I;	□ H;
Ha f-nek egy (x_0, y_0) pontban mindkét parciális deriváltja nulla, akkor ebben a pontban minden iránymenti derivált is nulla.	□ I;	■ H;
Ha f-nek léteznek a parciális deriváltjai egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos.	□ I;	■ H;
Ha f folytonos egy (x_0, y_0) pontban, akkor ebben a pontban f-nek minden esetben létezik a gradiense.	□ I;	■ H;

7. Legyen $a_n = \cos(n\pi) \dfrac{3^{2n-1}}{n^2 \cdot 9^n}$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz típusú.	■ I;	□ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.	■ I;	□ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nem abszolút konvergens.	□ I;	■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

1, $\frac{2xy}{x^2+y^2} \overset{y=mx}{=} \frac{2m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2}$ függ m-től $\Rightarrow$ $\nexists$ a limesz

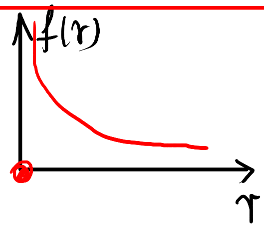
---

2, $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-2 \Rightarrow y_{H,ált}(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$

(Belső rez.)

3, $f(x,y) \geq 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0)$-ban globális (így lokális) minimum van.

Síkbeli polár rendszerben: $f(r,\varphi)=\begin{cases} 1/r, & \text{ha } r \neq 0 \\ 0, & \text{ha } r=0 \end{cases}$



Látható, hogy nincs lok. max.

(egy $(x,y)\neq(0,0)$ esetén $\operatorname{grad} f(x,y) \neq (0,0)$.)

4, $a_n=\frac{1}{(-2)^n n^3}$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \Rightarrow R=2$

$x=\pm 2$-ben: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n n^3}(\pm 2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n \frac{1}{n^3}$ konvergens!

K.T. = $[-2,+2]$

5, Explicit alak: $y'(x)=\frac{2y^2(x)}{x^3}$, szeparálható ✓

Behelyettesítéssel adódik, hogy $(x^2)'=2x = \frac{2(x^2)^2}{x^3} = 2x$ ✓

$x=y=1$ esetén a jobb oldal: $\frac{2\cdot 1^2}{1^3}=2 \neq 0$ ↯

6)

a, tanult tétel alapján igaz

b, Hamis, ellenpélda: $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

c, Hamis, ellenpélda:

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x=0 \text{ vagy } y=0 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

d, Hamis, ellenpélda: $f(x,y)=|x|$

---

7)

$$a_n=\cos(n\pi)\frac{3^{2n-1}}{9^n\cdot n^2}=(-1)^n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n^2}$ Leibniz, így konvergens, és abszolút konv.

$$\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha}<\infty \iff \alpha>1\right)$$

2024.06.18.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

$\boldsymbol{\alpha}$ □, $\boldsymbol{\beta}$ ■

címke névvel, Neptun kóddal

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **(4 × 5 = 20 pont)**

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = ?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'' - 6y' + 9y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása $y_á(x) = \ldots$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$

□ C_1e^{3x}; □ C_1e^{-3x}; ■ $C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$;
□ $C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; □ $C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$; □ más válasz.

3. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma és lokális minimuma is;
■ Az f függvénynek nem létezik lokális maximuma, és létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek létezik lokális maximuma, és nem létezik lokális minimuma;
□ Az f függvénynek nem létezik lokális szélsőértéke.

4. A $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(-3)^n n}$ $(x \in \mathbb{R})$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in \ldots$

■ $]-3,3]$; □ $[-3,3]$; □ $]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$; □ $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **(10 × 3 = 30 pont)**

5. A $2y'(x)x^3 - 4y^2(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

lineáris; □ I; ■ H;
megoldása az $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény; ■ I; □ H;
$K = 2$-hoz tatozó izoklinája tartalmazza az $(1,1)$ pontot. ■ I; □ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény.

Ha f folytonos egy (x_0, y_0) pontban, akkor ott minden esetben deriválható is. □ I; ■ H;
Ha f-nek léteznek a parciális deriváltjai egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos. □ I; ■ H;
Ha f-nek létezik a gradiense egy (x_0, y_0) pontban, akkor f ebben a pontban folytonos. ■ I; □ H;
Ha f-nek egy (x_0, y_0) pontban mindkét parciális deriváltja nulla, akkor ebben a pontban minden iránymenti derivált is nulla. □ I; ■ H;

7. Legyen $a_n = \cos(n\pi)\dfrac{2^{2n+1}}{n \cdot 4^n}$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz típusú. ■ I; □ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. ■ I; □ H;
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. □ I; ■ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

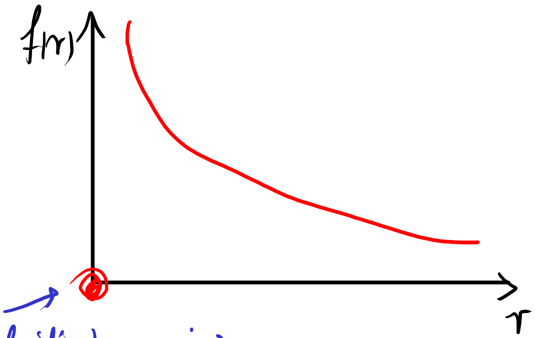
1,
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{r^{\cancel{3}}\overbrace{\cos^2\varphi\sin\varphi}^{\text{Korlátos}}}{\cancel{r^2}} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

2,
$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = +3 \implies y_{H,\text{ált}}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Belső rez.

3, Hasonló a/3-ban.

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} 1/r^2, & \text{ha } r \neq 0 \\ 0, & \text{ha } r = 0 \end{cases}$$



lokális (és globális) minimum.

4,
$$a_n = \frac{1}{(-3)^n \cdot n}; \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{1}{3} \implies R = +3$$

$x = +3$-ban: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(-3)^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergens (Leibniz)

$x = -3$-ban: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(-3)^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \implies$ K.T. $= (-3, +3]$

5, Explicit alak: $y'(x) = 2\dfrac{y^2(x)}{x^3}$ Nem lineáris!

Behelyettesítéssel adódik, hogy $y(x) = x^2$ megoldás ✓

$(x,y) = (1,1)$-ben a jobb oldal: $2\dfrac{1^2}{1^3} = 2$ ✓

6, Lényegében azonos 4/6-al.

7, $a_n = \cos(n\pi) \dfrac{2^{2n+1}}{n \cdot 4^n} = (-1)^n \cdot \dfrac{2 \cdot \cancel{4^n}}{n \cdot \cancel{4^n}} = 2 \cdot \dfrac{(-1)^n}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}$ Leibniz, így konvergens, de nem abszolút konvergens, hiszen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$