* 1. feladat (12+12=24 pont)

a)

$$\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = ?$$

(Próbálkozzunk az integrálok sorrendjének felcserélésével.)

b)

$$\int_H \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z) = ?,$$

ahol $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0,\ x \le 0,\ 0 \le z \le 1\}$

Mo. *a*) Legyen $f(x,y) := \cos(x^2) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ és $H := \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$. Ekkor H normáltartomány és f folytonos **(1p)** , továbbá $H = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$ **(1p)**

$$\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_H f \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_0^1 \int_0^y \cos(y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int_0^1 y\cos(y^2)\,\mathrm{d}y \overset{\textbf{(3p)}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(x^2)\right]_{y=0}^{1} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{\sin(1)}{2}.$$

b) Hengerkoordinátákkal, $H = \underline{C}\langle [1,2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [0,1] \rangle$

$$\int_H f \overset{\textbf{(6p)}}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^1 f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(3p)}}{=} \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^1 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{\pi}{2}.$$

(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

---

* 2. feladat (6+4=10 pont)

Legyen f az a 2π szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \pi & , \text{ha } x \in [-\pi, 0[\\ x & , \text{ha } x \in [0, \pi[\,. \end{cases}$$

a) Jelölje Φ az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét. Adjuk meg a $\Phi(0)$ és $\Phi(-1)$ értékeket
b) Egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$-en az f függvény Fourier-sora? (Indokoljunk.)

Mo. a) Az f függvényre teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei **(2p)** , ezért

$$\Phi(0) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{0-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \Phi(-1) \overset{\textbf{(2p)}}{=} f(-1) = 1 - \pi$$

b) Nem, mert ha egyenletesen konvergens lenne, akkor Φ folytonos lenne **(2p)** , azonban Φ pl. a 0-ban nem folytonos **(2p)** .

---

3. feladat (6+10=16 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot. (Bármelyik verziót.)

Mo. *Tétel:* Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú sorozat **(2p)** . Ekkor a következő állítások teljesülnek.

- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens. **(2p)**
- Ha $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens. **(2p)**

(Egyéb verziók is elfogadhatók.)
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, és legyen $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ **(2p)** . Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} \leq q a_n \quad \textbf{(1p)}.$$

Teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$a_n \leq q^{n-N} a_N = q^n \frac{a_N}{q^N} \quad \textbf{(2p)},$$

és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n \frac{a_N}{q^N}$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(1p)** .
A második rész bizonyításához tegyük fel, hogy $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n, \quad \textbf{(2p)},$$

tehát teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $a_n > a_N$ **(1p)** . Ez azt jelenti, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem tart 0-hoz így, azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele **(1p)**, következésképpen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens.

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbb{R}^n$-beli A és B halmazok nyíltak, akkor $A \cap B$ is nyílt.

Mo. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor a nyíltság definíciója alapján teljesül az állítás **(2p)** . Ellenkező esetben legyen $\underline{x} \in A \cap B$ tetszőleges. Ekkor A és B nyíltsága alapján létezik olyan $r_1 > 0$ és $r_2 > 0$, hogy $B_{r_1}(\underline{x}) \subseteq A$, illetve $B_{r_2}(\underline{x}) \subseteq B$ **(4p)** , tehát az $r := \min\{r_1, r_2\}$ választással $B_r(\underline{x}) \subseteq A \cap B$ teljesül **(3p)**. Mivel $\underline{x}$ tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy $A \cap B$ nyílt **(1p)** .
