*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol

a)

$$f(x,y) := 2xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

H pedig az $y = x$ és $y = x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos tartomány;

b)

$$f(x,y.z) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^2\big),$$
$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le x^2+y^2\}.$$

Mo. a)

$$H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\big\}, \quad (\mathbf{2p}).$$

H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)**, tehát:

$$\int_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_0^1 \big[xy^2\big]_{y=x^2}^{x} \,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_0^1 x^3 - x^5 \,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{1} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{12}.$$

b) Hengerkoordinátákkal

$$\int_H f \overset{(\mathbf{4p})}{=} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \cdot r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$
$$= 2\pi \int_0^2 r^4 \,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} 2\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{64\pi}{5}.$$

(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathscr{F}\big(x \mapsto f(2x+3)\big)$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltjának segítségével.

Mo. Minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{F}(x \mapsto f(x+3))(\omega) = e^{3\mathbf{i}\omega}\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad (\mathbf{5p})$$
$$\mathscr{F}(x \mapsto f(2x+3))(\omega) = \frac{1}{2} e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}} \mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (\mathbf{5p})$$

Alternatív megoldás a Fourier-transzformált definíciójával, majd a $t = 2x+3$, ($x = \frac{t}{2} - \frac{3}{2}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$) helyettesítéssel:

$$\mathscr{F}\big(x \mapsto f(2x+3)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega x} f(2x+3)\,\mathrm{d}x = \qquad (\mathbf{2p})$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\right)} f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \qquad (\mathbf{5p})$$
$$= \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}\mathbf{i}\omega} \mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right). \qquad (\mathbf{3p})$$

---

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Pontosan milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ sor?
b) Bizonyítsuk az *a*) pontban megfogalmazott állítást $\alpha \neq 1$ esetén. (Az előadáson tanult tételt felhasználhatunk a bizonyításban.)

Mo. *a*) A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \dfrac{1}{n^\alpha}$ numerikus sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$. **(6p)**

b) Ha $\alpha \leq 0$, akkor az $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz, tehát $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ divergens. **(2p)**

Ha $0 < \alpha \neq 1$, akkor

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^b \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \begin{cases} +\infty & \text{, ha } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{, ha } \alpha > 1, \end{cases}$$

tehát az integrálkritérium alapján **(2p)** $\alpha > 1$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, $0 < \alpha < 1$ esetén pedig divergens **(1p)** .

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk példát olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra, amely pontonként konvergens a $[0,1]$ intervallumon, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon, $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ Riemann-integrálható $[0,1]$-en, továbbá az $\left(\int\limits_0^1 f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens és $\int\limits_0^1 f_n \overset{n\to\infty}{\not\to} \int\limits_0^1 f$

Mo. Egy lehetséges példa: minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2x & \text{, ha } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - n^2x & \text{, ha } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{2}{n}] \end{cases} \qquad \mathbf{(6p)}$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$ **(2p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\int\limits_0^1 f_n = 1$ **(2p)** .
