2024.06.25.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] (4 × 5 = 20 pont)

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = ?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) = \sin(x) + 3$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \ldots \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

□ $Ae^x + Bxe^x + C$; □ $A\sin(x) + B$; □ $A\sin(x) + Bx + C$;
■ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx$; □ $A\sin(x) + Bx^2 + Cx$; □ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := x^2 + y^3 - 2x - 3 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Az f függvény $(1,1)$ pontbeli iránymenti deriváltja az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektor irányában:

□ 0; □ $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ■ $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; □ $-\sqrt{2}$; □ más válasz.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n)!} = \ldots \quad (x \geq 0)$

□ $x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; ■ $x\cos(\sqrt{x})$; □ $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; □ $xe^{-\frac{x}{2}}$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] (10 × 3 = 30 pont)

5. A $2y'(x) - x^2 4y(x) = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

homogén;	□ I; ■ H;
lineáris;	■ I; □ H;
tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik és egyértelmű a megoldása.	■ I; □ H;

6. $f(x) = \sqrt[4]{1+2x^3}$

A függvény 0 középontú, nyolcadfokú Taylor-polinomja 3 tagot tartalmaz.	■ I; □ H;
A függvény 0 középpontú Taylor-sora mindenütt előállítja f-et.	□ I; ■ H;
A 0 középpontú Taylor-sorban az x^3 együtthatója $\frac{3}{8}$.	□ I; ■ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor minden átrendezése konvergens, akkor abszolút konvergens.	■ I; □ H;
Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > \frac{1}{n}$.	□ I; ■ H;
Ha $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} \leq 1$, akkor $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.	□ I; ■ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq a_n \leq \frac{n!}{n^n}$, akkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens.	■ I; □ H;

---

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

α/1,

$$\frac{\sin(xy^2)}{xy}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \underbrace{\frac{\sin(xy^2)}{xy^2}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 1}\cdot \underset{\to 0}{y}\cdot \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\text{korlátos}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \boxed{0}$$

α/2,

$$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda = (\lambda-1)^2\cdot\lambda \Rightarrow y_{H,\acute{a}ll}(x) = \boxed{C_1} + C_2e^x + C_3xe^x$$

$f(x) = \sin x + 3$ Külső rezonancia!

$$y_{I,part}(x) = A\sin x + B\cos x + Cx$$

α/3,

$f'_x(x,y) = 2x^2-2$; $f'_x(1,1) = 0$

$f'_y(x,y) = 3y^2$; $f'_y(1,1) = 3$

$$\operatorname{grad} f(1,1) = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{df}{de}\right|_{(1,1)} = \left\langle \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

α/4,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(2n)!} = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = x\cos(\sqrt{x})$$

α/5,

Nem homogén a jobb oldalon álló tag miatt.

Lineáris, és a tanult tétel miatt minden kezdeti feltételhez létezik egyértelmű megoldás

α/6,

$$f(x) = (1+2x^3)^{1/4} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/4}{n}(2x^3)^n, \quad \text{ha } |2x^3|<1$$

(Binomiális sorfejtés)

$$T_8(x) = \binom{1/4}{0}(2x^3)^0 + \binom{1/4}{1}2x^3 + \binom{1/4}{2}(2x^3)^2 = 1+\frac{1}{4}\cdot 2x^3 + \binom{1/4}{2}4x^6$$

3 tag

$R = 1$, így $|2x^3|>1$ esetén a sor divergens.

x^3 együtthatója: $\binom{1/4}{1}\cdot 2 = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{8}$

2/7,

i, Tanult tétel szerint feltételesen konvergens sor átrendezhető úgy, hogy limesz szuperiorja és inferiorja egy-egy előre megadott érték legyen, tehát átrendezhető úgy is, hogy divergens legyen. Tehát ha minden átrendezés konvergens, akkor a sor abszolút konvergens.

ii, Nem $\forall n:\ a_n > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_n a_n > \sum_n \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \sum_n a_n$ divergens

iii, Hamis, ellenpélda: $a_n = 1$

iv, $\forall n:\ 0 \le a_n \le \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \sum_n a_n \le \underbrace{\sum_n \frac{n!}{n^n}} < \infty \Rightarrow \sum_n a_n$ abs. konv.

Hányados krit. alapján:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

2024.06.25.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ □, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] ($4 \times 5 = 20$ pont)

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{xy} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = ?$

■ 0; □ 1; □ -1; □ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos(x) + 2x$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \ldots \quad (x \in \mathbb{R}, A, B, C, D \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

□ $Ae^{-x} + Bxe^{-x} + C$; □ $A\cos(x) + Bx$; □ $A\cos(x) + Bx + C$;
■ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx + D$; □ $A\sin(x) + B\cos(x) + Cx^2 + Dx$; □ más válasz.

3. Legyen $f(x,y) := 2x^2 + y^3 - 3x + 4 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$. Az f függvény $(1,1)$ pontbeli iránymenti deriváltja a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektor irányában:

□ 0; □ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; □ $\frac{3}{\sqrt{2}}$; ■ $\sqrt{2}$; □ más válasz.

4. $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!} = \ldots \quad (x \geq 0)$

■ $x\,\mathrm{ch}(\sqrt{x})$; □ $x\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$; □ $xe^{\frac{x}{2}}$; □ $\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] ($10 \times 3 = 30$ pont)

5. A $2y'(x) - x^3 4y(x) = \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ differenciálegyenlet

lineáris; ■ I; □ H;
állandó együtthatós; □ I; ■ H;
tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik és egyértelmű a megoldása. ■ I; □ H;

6. $f(x) = \sqrt[3]{1 + 2x^4}$

A függvény 0 középontú, tizedfokú Taylor-polinomja 4 tagot tartalmaz. □ I; ■ H;
A függvény 0 középpontú Taylor-sora mindenütt előállítja f-et. □ I; ■ H;
A 0 középpontú Taylor-sorban az x^4 együtthatója $\frac{2}{3}$. ■ I; □ H;

7. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós számsorozat.

Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > \frac{1}{n}$. □ I; ■ H;
Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor konvergens, akkor minden átrenedézese is konvergens. □ I; ■ H;
Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq a_n \leq \frac{n!}{n^n}$, akkor a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ numerikus sor abszolút konvergens. ■ I; □ H;
Ha $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

$\beta/1,$

$$\frac{\sin(x^2y^2)}{xy}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\underbrace{\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2y^2}}_{\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\ 1}\cdot\underbrace{xy}_{\to 0}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{\text{korlátos}}\longrightarrow 0$$

$\beta/2,$

$$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2\Longrightarrow y_{H,ált}(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$$

Nincs külső rezonancia

$$f(x)=\cos x+2x$$

$$y_{I,p}(x)=A\sin x+B\cos x+Cx+D$$

$\beta/3,$

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\begin{bmatrix}f'_x\\ f'_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x-3\\ 3y^2\end{bmatrix};\quad \operatorname{grad} f(1,1)=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{df}{de}\right|_{(1,1)}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{bmatrix}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{3}{\sqrt2}=\frac{2}{\sqrt2}=\underline{\sqrt2}$$

$\beta/4,$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}=\underline{x\,\operatorname{ch}(\sqrt{x})}$$

$\beta/5,$ Lineáris; nem állandó együttható az x^3 miatt; tanult tétel szerint $\exists!$ megoldás...

$\beta/6,$

$$f(x)=(1+2x^4)^{1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}(2x^4)^n=\underbrace{1+\overbrace{\frac13\cdot 2}^{a_4=\frac23}x^4+\binom{1/3}{2}4x^8+\binom{1/3}{3}2^3x^{12}}_{T_{10}(x);\ 3\text{ db tag}}+\dots$$

$R=1$; $|2x^4|>1$ esetén a sor div. $T_{10}(x)$; 3 db tag

$\beta/7,$ i, $\forall n:\ a_n>\frac1n\Rightarrow\sum_n a_n>\sum_n\frac1n=\infty\Rightarrow\sum_n a_n$ divergens (H)

ii, Feltételesen konvergens sorra nem igaz.

iii, Mint $\alpha/7/iv$

iv, $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1\Rightarrow\sum_n|a_n|$ konvergens $\Rightarrow a_n\xrightarrow{n\to\infty}0$