*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)
$$f(x,y) := 2x^2y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$
H pedig az $y=-x$ és $y=x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos tartomány;

b)
$$f(x,y.z) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^2\big),$$
$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2 \le z \le 1\}.$$

Mo. a)
$$H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\big\}, \quad (\mathbf{2p}).$$
H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)** , tehát:
$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{x^2}^{-x} 2x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_{-1}^{0} \left[x^2y^2\right]_{y=x^2}^{-x}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_{-1}^{0} x^4 - x^6\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{x=-1}^{0} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{2}{35}.$$
b) Hengerkoordinátákkal
$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{4p})}{=} \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r^2}^{1} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r^2}^{1} r^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$
$$= 2\pi\int\limits_0^1 r^2 - r^4\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} 2\pi\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{1} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{4\pi}{15}.$$
(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az
$$\mathscr{F}\big(x \mapsto f(3x-2)\big)$$
Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltjának segítségével.

Mo. Minden $\omega \in \mathbb{R}$ esetén
$$\mathscr{F}(x \mapsto f(x-2))(\omega) = e^{-2\mathbf{i}\omega}\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad (\mathbf{5p})$$
$$\mathscr{F}(x \mapsto f(3x-2))(\omega) = \frac{1}{3}e^{-2\mathbf{i}\frac{\omega}{3}}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{3}\right) \qquad (\mathbf{5p})$$

Alternatív megoldás a Fourier-transzformált definíciójával, majd a $t = 3x-2$, ($x = \frac{t}{3}+\frac{2}{3}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$) helyettesítéssel:
$$\mathscr{F}\big(x \mapsto f(3x-2)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega x} f(3x-2)\,\mathrm{d}x = \qquad (\mathbf{2p})$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega\left(\frac{t}{3}+\frac{2}{3}\right)} f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{3} = \qquad (\mathbf{5p})$$
$$= \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}\mathbf{i}\omega}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{3}\right). \qquad (\mathbf{3p})$$

---

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Pontosan milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ sor?
b) Bizonyítsuk az *a*) pontban megfogalmazott állítást $\alpha \neq 1$ esetén. (Az előadáson tanult tételt felhasználhatunk a bizonyításban.)

Mo. *a*) A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \dfrac{1}{n^\alpha}$ numerikus sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$. **(6p)**

b) Ha $\alpha \leq 0$, akkor az $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz, tehát $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ divergens. **(2p)**

Ha $0 < \alpha \neq 1$, akkor

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^{b} \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \begin{cases} +\infty & \text{, ha } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{, ha } \alpha > 1, \end{cases}$$

tehát az integrálkritérium alapján **(2p)** $\alpha > 1$ esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, $0 < \alpha < 1$ esetén pedig divergens **(1p)** .

---

4. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk példát olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra, amely pontonként konvergens a $[0,1]$ intervallumon, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon, $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ Riemann-integrálható $[0,1]$-en, továbbá az $\left(\int\limits_0^1 f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens és $\int\limits_0^1 f_n \overset{n\to\infty}{\not\to} \int\limits_0^1 f$

Mo. Egy lehetséges példa: minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{, ha } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{, ha } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{2}{n}] \end{cases} \qquad (\mathbf{6p})$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$ **(2p)** , továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\int\limits_0^1 f_n = 1$ **(2p)** .
