1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{3+y^2}}{2y(2+x^2)} \quad (y \neq 0)$$

Mo. Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{3+y^2}}{2y(2+x^2)} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{2y}{\sqrt{3+y^2}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int 2y(3+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{3+y^2} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{7p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$2\sqrt{3+y^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3 e^{2x} \quad (x \neq 0), \qquad y(1) = e^2$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{3y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,\text{á}}(x) = Cx^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (\mathbf{6p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^3$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x^3 + 3c(x)x^2}_{y'(x)} - \underbrace{3c(x)x^2}_{\frac{3y(x)}{x}} = x^3 e^{2x} \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = e^{2x}$.

$$\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := \frac{1}{2}e^{2x}$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x^3 = \frac{x^3}{2}e^{2x} \quad (\mathbf{1p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{x^3}{2}e^{2x} + Cx^3 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(1) = e^2 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{e^2}{2}$ $(\mathbf{2p})$, azaz

$$\tilde{y}(x) = \frac{x^3}{2}e^{2x} + \frac{e^2}{2}x^3 \quad (x > 0) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}$$

Mo. Másodrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3,$ $(\mathbf{2p})$. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = Axe^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

alakban keressük (rezonancia miatt). Deriválva kétszer $(\mathbf{2p})$:

$$\begin{aligned} y(x) &= Axe^{3x} && |\cdot 3 \\ y'(x) &= A(1+3x)e^{3x} && |\cdot(-4) \\ y''(x) &= A(6+9x)e^{3x} && |\cdot 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 2Ae^{3x} = 4e^{3x} \quad (\mathbf{1p})$$

$$\Longrightarrow \quad A = 2 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = 2xe^{3x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= 2xe^{3x} + C_1e^x + C_2e^{3x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

---

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n \qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{n^3 \cdot 5^n}{(2n)!} \qquad c)\ \sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{\sin(n^2)}{n^2\ln(n)}$$

Mo. *a*) Legyen $a_n := \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$a_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \xrightarrow[(\mathbf{2p})]{n\to\infty} \frac{e}{e^3} = \frac{1}{e^2} \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens **(2p)** .

b) Legyen $b_n := \frac{n^3 \cdot 5^n}{(2n)!} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.
Ekkor

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{(n+1)^3 5^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^3 \cdot 5^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{5(n+1)^3}{n^3(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

Tehát a hányadoskritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

c) Legyen $c_n := \frac{\sin(n^2)}{n^2\ln(n)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén

$$|c_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad (\mathbf{5p}),$$

és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} c_n$ abszolút konvergens **(2p)** következésképpen konvergens **(1p)** .

---

5. feladat (6+14=20 pont)
a) Mit mond ki a (numerikus sorokra vonatkozó) gyökkritérium?
b) Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{2n+1}{9n-5}\right)^n$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 99. részletösszeggel közelítjük.

Mo. *a*) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív tagú számsorozat **(2p)** . Ekkor a következő állítások teljesülnek.

- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens. **(2p)**
- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens. **(2p)**

(A gyökkritérium egyéb formáinak kimondása is maximális pontot ér.)

b) Legyen $a_n := \left(\frac{2n+1}{9n-5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2n+1}{9n-5} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{9} < 1 \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** . Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $n \geq 5$ esetén

$$0 \leq a_n \leq \frac{3}{8} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$\left|S - \sum_{n=1}^{99} a_n\right| \overset{(\mathbf{1p})}{=} \sum_{n=100}^{\infty} a_n \overset{(\mathbf{1p})}{\leq} \sum_{n=100}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left(\frac{3}{8}\right)^{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{8}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{100} \cdot \frac{8}{5}.$$

(Minden egyéb helyes, konvergens geometriai sor tagjaival való felső becslés is maximális pontot ér.)

---

6. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk meg egy pozitív értékű, monoton növő függvényt, amelyre teljesül, hogy a grafikonjának bármely pontjába húzott érintő, a ponton átmenő függőleges egyenes és az x tengely által meghatározott háromszög területe 1.

Mo. Legyen f ilyen függvény és $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Ekkor a kérdéses háromszög alapjának hossza:

$$x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\mathbf{2p}),$$

a magassága pedig $f(x_0)$ **(1p)** . Azaz minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\frac{f^2(x)}{2f'(x)} = 1 \quad (\mathbf{2p}).$$

Szeparálható differenciálegyenletet kaptunk, amelynek a fenti feltételek melletti megoldásai

$$f(x) = \frac{1}{C - \frac{x}{2}} \quad (C \in \mathbb{R},\, x < 2C) \quad (\mathbf{3p}).$$

Pl. $C = 0$ választással az $\tilde{f}(x) := -\frac{2}{x} \quad (x < 0)$ függvény megfelel a követelményeknek **(2p)** .
