1. feladat (18 pont)
Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet. (A megoldást elég implicit alakban megadni.)

$$y' = \frac{\sqrt{2+y^4}}{4y^3(4+x^2)} \quad (y \neq 0)$$

Mo. Szeparálható differenciálegyenlet, a tanult módszerrel:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{2+y^4}}{4y^3(4+x^2)} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{4y^3}{\sqrt{2+y^4}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \quad (\mathbf{2p}).$$

Az egyenlőség bal oldala:

$$\int 4y^3(2+y^4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{2+y^4} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{7p}).$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \quad (C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{5p}).$$

Tehát a megoldás (implicit alakban):

$$2\sqrt{2+y^4(x)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

2. feladat (20 pont)
Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^{3x} \quad (x \neq 0), \qquad y(1) = \frac{2e^3}{3}$$

Mo. Inhomogén lineáris egyenlet, a hozzá tartozó homogén egyenlet:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{h,\acute{a}}(x) = Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}) \quad (\mathbf{6p}).$$

(Megoldva szeparálhatóként, vagy a megoldás általános alakjának ismeretéből.)
Az inhomogén egyenlet megoldása: keressük a megoldást $y(x) = c(x)x^2$ alakban (ahol c egy $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény) **(1p)** .
Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\underbrace{c'(x)x^2 + 2c(x)x}_{y'(x)} - \underbrace{2c(x)x}_{\frac{2y(x)}{x}} = x^2e^{3x} \quad (\mathbf{2p}).$$

Ebből pedig $c'(x) = e^{3x}$.

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x} + D \quad (D \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát a $D = 0$ választással $c(x) := \frac{1}{3}e^{3x}$, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = c(x)x^2 = \frac{x^2}{3}e^{3x} \quad (\mathbf{1p}).$$

Amiből az általános megoldás:

$$y_{i,á}(x) \overset{(\mathbf{2p})}{=} y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{x^2}{3}e^{3x} + Cx^2 \quad (C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Jelölje $\widetilde{y}$ a kezdeti feltételt kielégítő megoldást. $\tilde{y}(1) = \frac{2e^3}{3} \implies C = \frac{e^3}{3}$ $(\mathbf{2p})$, azaz

$$\tilde{y}(x) = \frac{x^2}{3}e^{3x} + \frac{e^3}{3}x^2 \quad (x > 0) \quad (\mathbf{2p}).$$

---

3. feladat (20 pont)
Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$$

Mo. Másodrendű, lineáris állandó együtthatós, inhomogén egyenlet. A homogén egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (\mathbf{2p}),$$

gyökei: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2,$ $(\mathbf{2p})$. Ebből a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{h,á}(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y(x) = Axe^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{4p})$$

alakban keressük (rezonancia miatt). Deriválva kétszer $(\mathbf{2p})$:

$$\begin{aligned} y(x) &= Axe^{2x} && \mid \cdot (-2) \\ y'(x) &= A(1+2x)e^{2x} && \mid \cdot (-1) \\ y''(x) &= A(4+4x)e^{2x} && \mid \cdot 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3Ae^{2x} = 3e^{2x} \quad (\mathbf{1p})$$

$$\implies \quad A = 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_{i,p}(x) = xe^{2x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{1p}).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{i,á}(x) &= y_{i,p}(x) + y_{h,á}(x) = \\ &= xe^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \quad (x \in \mathbb{R},\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{2p}). \end{aligned}$$

---

4. feladat (7+7+8=22 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok?

$a)$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^n$ $\qquad b)$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{n^2\cdot 2^n}{(3n)!}$ $\qquad c)$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} \frac{\cos(n^2+1)}{n^2\ln(n)}$

Mo. $a)$ Legyen $a_n := \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$$a_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n} \underset{(\mathbf{2p})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{e^2}{e^5} = \frac{1}{e^3} \neq 0 \quad (\mathbf{1p}),$$

azaz nem teljesül a sorok konvergenciájának szükséges feltétele, ezért $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergens **(2p)** .

$b)$ Legyen $b_n := \frac{n^2\cdot 2^n}{(3n)!} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.
Ekkor

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n^2\cdot 2^n} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2(n+1)^2}{n^2(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \quad (\mathbf{2p}),$$

Tehát a hányadoskritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens **(2p)** .

$c)$ Legyen $c_n := \frac{\cos(n^2+1)}{n^2\ln(n)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.
Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén

$$|c_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad (\mathbf{5p}),$$

és $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ konvergens, tehát a majoráns kritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 2} c_n$ abszolút konvergens **(2p)** következésképpen konvergens **(1p)** .

---

5. feladat (6+14=20 pont)
$a)$ Mit mond ki a (numerikus sorokra vonatkozó) gyökkritérium?
$b)$ Konvergens-e a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^+} \left(\frac{3n+1}{8n-2}\right)^n$$

numerikus sor? Amennyiben igen, adjunk nemtriviális felső becslést az elkövetett hibára, ha a sor összegét a 99. részletösszeggel közelítjük.

Mo. *a*) Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív tagú számsorozat **(2p)** . Ekkor a következő állítások teljesülnek.

- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor konvergens. **(2p)**
- Ha $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ sor divergens. **(2p)**

(A gyökkritérium egyéb formáinak kimondása is maximális pontot ér.)

b) Legyen $a_n := \left(\frac{3n+1}{8n-2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \frac{3n+1}{8n-2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{8} < 1 \quad \mathbf{(3p)},$$

tehát a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens **(2p)** . Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $n \geq 2$ esetén

$$0 \leq a_n \leq \frac{4}{7} \quad \mathbf{(3p)},$$

tehát ha S jelöli a sor összegét, akkor

$$\left| S - \sum_{n=1}^{99} a_n \right| \overset{\mathbf{(1p)}}{=} \sum_{n=100}^{\infty} a_n \overset{\mathbf{(1p)}}{\leq} \sum_{n=100}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n \overset{\mathbf{(2p)}}{=} \left(\frac{4}{7}\right)^{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{7}} = \left(\frac{4}{7}\right)^{100} \cdot \frac{7}{3}.$$

(Minden egyéb helyes, konvergens geometriai sor tagjaival való felső becslés is maximális pontot ér.)

---

6. feladat (plusz 10 pontért)
Adjunk meg egy pozitív értékű, monoton növő függvényt, amelyre teljesül, hogy a grafikonjának bármely pontjába húzott érintő, a ponton átmenő függőleges egyenes és az x tengely által meghatározott háromszög területe 1.

Mo. Legyen f ilyen függvény és $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Ekkor a kérdéses háromszög alapjának hossza:

$$x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \mathbf{(2p)},$$

a magassága pedig $f(x_0)$ **(1p)** . Azaz minden $x \in \mathrm{Dom}(f)$ esetén

$$\frac{f^2(x)}{2f'(x)} = 1 \quad \mathbf{(2p)}.$$

Szeparálható differenciálegyenletet kaptunk, amelynek a fenti feltételek melletti megoldásai

$$f(x) = \frac{1}{C - \frac{x}{2}} \quad (C \in \mathbb{R},\ x < 2C) \quad \mathbf{(3p)}.$$

Pl. $C = 0$ választással az $\tilde{f}(x) := -\frac{2}{x} \quad (x < 0)$ függvény megfelel a követelményeknek **(2p)** .
