

1. feladat (10+10=20 pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A b) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$a) \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{(x+1)^k}{k \cdot 2^k} \qquad b) \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

2. feladat (14 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését és a Taylor-sorának konvergenciasugarát!

$$f(x) := \frac{x^3}{4-x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\})$$

3. feladat (14 pont)

Határozzuk meg az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ?$$

4. feladat (8+6+10+4=28 pont)

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{3xy}{x^2 + 2y^2} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? Adjunk elégséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!
- Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)
- Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait!
- A sík mely pontjaiban differenciálható f ? (Indokoljunk!)

5. feladat (14 pont)

Legyen

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + xy - 3x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

6. feladat (10 pont)

Számítsuk ki az $\int_H f$ integrál értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ csúcspontok által meghatározott háromszög, és

$$f(x, y) := x^2 y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg az arcsin függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtését!