1. feladat (12+10=22 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A b) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(x+2)^n}{3n\cdot 2^n} \qquad\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \frac{1}{3n\cdot 2^n}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot 2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát $R_a = 2$ **(2p)** , azaz minden $x \in]-4,0[$ esetén konvergens a sor **(2p)** ($x \in \mathbb{R}\setminus[-4,0]$ esetén pedig divergens).
Vizsgáljuk meg az intervallum végpontjait:

- $x=-4$ esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{3n}$ sor a Leibniz-kritérium alapján konvergens **(2p)** ,
- $x=0$ esetén pedig a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{3n}$ sor divergens **(1p)** ,

tehát összegezve: a sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in [-4,0[$ **(1p)** .

b) Minden $x\in\mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh}(x^2) \quad (\mathbf{8p}).$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n+1)!}$ sor konvergenciasugarának meghatározásáért önmagában nem jár pont.)

---

2. feladat (20 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0=0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(99)}(0)$ deriváltat.

$$f(x) := \frac{1}{(4-x)^2} \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{4\})$$

Mo. Legyen $g(x) := \frac{1}{4-x}$ $(x\in\mathbb{R}\setminus\{4\})$, ekkor $g' = f$ **(2p)** .

$$g(x) = \frac{1}{4-x} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{4}} \underset{(*)}{\overset{(\mathbf{2p})}{=}} \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n \overset{(\mathbf{1p})}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}x^n,$$

ahol a $(*)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x|<4$ **(2p)** , tehát g (0 középpontú) Taylor-sorának konvergenciasugara 4 **(1p)** .

A konvergenciasugár deriválásnál nem változik **(1p)** , ezért az f függvény (0 középpontú) Taylor-sorának konvergenciasugara is 4 **(2p)** , továbbá $x\in\mathbb{R}$ és $|x|<4$ esetén

$$f(x) = g'(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}x^n.$$

Jelölje $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ az f (0 középpontú) Taylor-sorának együttható-sorozatát. Ekkor

$$f^{(99)}(0) \overset{(\mathbf{2p})}{=} a_{99}\cdot 99! \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{100!}{4^{101}}.$$

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Mit mond ki a határértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények esetén)

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(x^2y\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right) =?$$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \mathrm{Dom}(f)'$ (azaz $\underline{a}$ torlódási pontja az f függvény értelmezési tartományának) **(2p)** és $b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = b \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{l} \underline{x}_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} b \\ \forall(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \mathrm{Dom}(f)\setminus\{\underline{a}\}\text{-ban halad.}\end{array} \qquad \textbf{(4p)}$$

b) Legyen $f(x,y) := \sin\left(x^2y\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+2y^6}\right)$ $\quad((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ **(2p)** . Ekkor

$$f(x_k, y_k) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \underbrace{\sin\left(x_k^2 y_k\right)}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x_k^2+2y_k^6}\right)}_{\text{korlátos}} \underset{\textbf{(2p)}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a fenti gondolatmenet az átviteli elv használata nélkül szerepel.)

4. feladat (10+4=14 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{3x\,\mathrm{ch}(y)}{x^2+2y^2} & \text{, ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f? (Indokoljunk.)

Mo. *a)* Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)** , akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{3\,\mathrm{ch}(y)(x^2+2y^2) - 6x^2\,\mathrm{ch}(y)}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{3x\,\mathrm{sh}(y)(x^2+2y^2) - 12xy\,\mathrm{ch}(y)}{(x^2+2y^2)^2} \quad \textbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{3}{x^2} = +\infty \quad \textbf{(2p)},$$

tehát $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(1p)** .

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y} = 0 \quad \textbf{(2p)}.$$

b) Az origóban nem differenciálható f, mert $\partial_1 f(0,0)$ nem létezik **(2p)** , a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nyílt halmazon **(2p)** .

5. feladat (16+6+6=28 pont)
Legyen
$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki az f függvény $(-1,1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ irány menti deriváltját.

c) Határozzuk meg az f függvény $(-1,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

Mo. a) Minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén
$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y \quad \textbf{(1p)} \qquad \partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x \quad \textbf{(1p)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(2p)} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)\in\{(0,0),(1,1)\} \quad \textbf{(4p)},$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti két pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad \textbf{(2p)},$$

tehát
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2p)},$$

azaz $H_f(0,0)$ indefinit, $H_f(1,1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)**, következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f-nek, az $(1,1)$ pontban pedig lokális minimuma van **(2p)**.

b) Az f függvény differenciálható a $(-1,1)$ pontban **(1p)** , ezért
$$D_{\underline{v}} f(-1,1) \overset{\textbf{(2p)}}{=} \langle \mathrm{grad} f(-1,1), \underline{v}\rangle \overset{\textbf{(2p)}}{=} \left\langle (0,6), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\rangle \overset{\textbf{(1p)}}{=} -3\sqrt{2}.$$

c) Az érintősík egy normálvektora:
$$(\partial_1 f(-1,1), \partial_2 f(-1,1), -1) = (0,6,-1) \quad \textbf{(2p)},$$

egy pontja:
$$(-1,1,f(-1,1)) = (-1,1,3) \quad \textbf{(2p)},$$

tehát az érintősík egyenlete
$$0(x+1) + 6(y-1) - (z-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6y - z = 3 \quad \textbf{(2p)}.$$

---

6. feladat (plusz 10 pontért)
Egyenletesen konvergens-e $\mathbb{R}$-en a sin függvény 0 középpontú Taylor-sora?

Mo. A sin függvényt előállítja a Taylor sora $\mathbb{R}$-en **(1p)** , tehát a kérdés, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin(x) - T_{n,0}^{\sin}(x)\right| = 0$$

teljesül-e **(2p)** . Mivel sin korlátos, $T_{n,0}^{f}$ pedig minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén n-edfokú, nem konstans polinom **(2p)** , ezért
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin(x) - T_{n,0}^{\sin}(x)\right| = +\infty$$

teljesül minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén **(3p)** , tehát $\left(T_{n,0}^{\sin}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nem egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en **(2p)** .
