

1. feladat (12+10=22 pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A b) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{(x+1)^n}{2n \cdot 3^n} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

2. feladat (20 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(99)}(0)$ deriváltat.

$$f(x) := \frac{1}{(3-x)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

3. feladat (6+10=16 pont)

a) Mit mond ki a határértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények esetén)

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(xy^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{2x^4 + y^2}\right) = ?$$

4. feladat (10+4=14 pont)

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2y \operatorname{ch}(x)}{3x^2 + y^2} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.

b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f ? (Indokoljunk.)

5. feladat (16+6+6=28 pont)

Legyen

$$f(x, y) := x^5 + y^5 - 5xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.

b) Számítsuk ki az f függvény $(1, -1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ irány menti deriváltját.

c) Határozzuk meg az f függvény $(1, -1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

6. feladat (plusz 10 pontért)

Egyenletesen konvergense-e \mathbb{R} -en a \sin függvény 0 középpontú Taylor-sora?