

1. feladat (12+10=22 pont)

Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A b) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is.

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{(x+1)^n}{2n \cdot 3^n} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \frac{1}{2n \cdot 3^n}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{(1p)}{=} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \quad (3p),$$

tehát $R_a = 3$ (2p), azaz minden $x \in]-4, 2[$ esetén konvergens a sor (2p) ($x \in \mathbb{R} \setminus [-4, 2]$ esetén pedig divergens).

Vizsgáljuk meg az intervallum végpontjait:

- $x = -4$ esetén a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{(-1)^n}{2^n}$ sor a Leibniz-kritérium alapján konvergens (2p),
- $x = 2$ esetén pedig a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{2^n}$ sor divergens (1p),

tehát összegezve: a sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in [-4, 2[$ (1p).

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (2p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(x^2) \quad (8p).$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár. A $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n)!}$ sor konvergenciasugarának meghatározásáért önmagában nem jár pont.)

2. feladat (20 pont)

Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, Taylor-sorának konvergenciasugarát és az $f^{(99)}(0)$ deriváltat.

$$f(x) := \frac{1}{(3-x)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

Mo. Legyen $g(x) := \frac{1}{3-x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$), ekkor $g' = f$ (2p).

$$g(x) = \frac{1}{3-x} \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \stackrel{(2p)}{=} \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \stackrel{(1p)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n,$$

ahol a (*) egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x| < 3$ (2p), tehát g (0 középpontú) Taylor-sorának konvergenciasugara 3 (1p).

A konvergenciasugar deriválásnál nem változik (1p), ezért az f függvény (0 középpontú) Taylor-sorának konvergenciasugara is 3 (2p), továbbá $x \in \mathbb{R}$ és $|x| < 3$ esetén

$$f(x) = g'(x) \stackrel{(3p)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+2}} x^n.$$

Jelölje $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ az f (0 középpontú) Taylor-sorának együttható-sorozatát. Ekkor

$$f^{(99)}(0) \stackrel{(2p)}{=} a_{99} \cdot 99! \stackrel{(2p)}{=} \frac{100!}{3^{101}}.$$

3. feladat (6+10=16 pont)a) Mit mond ki a határértékre vonatkozó átviteli elv? ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvények esetén)

b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(xy^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{2x^4+y^2}\right) = ?$$

Mo. a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $\underline{a} \in \text{Dom}(f)'$ (azaz \underline{a} torlódási pontja az f függvény értelmezési tartományának) **(2p)** és $b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = b \iff \begin{array}{l} \underline{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \underline{a} \Rightarrow f(\underline{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \\ \forall (\underline{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ sorozatra, amely } \text{Dom}(f) \setminus \{\underline{a}\} \text{-ban halad.} \end{array} \quad \mathbf{(4p)}$$

b) Legyen $f(x, y) := \sin(xy^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{2x^4+y^2}\right)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$). Tegyük fel, hogy $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ -ban haladó sorozat, amelyre $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0)$ **(2p)**. Ekkor

$$f(x_k, y_k) \stackrel{\mathbf{(4p)}}{=} \underbrace{\sin(x_k y_k^2)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{2x_k^4 + y_k^2}\right)}_{\text{korlátos}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \mathbf{(2p)}$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ **(2p)**. (Akkor is adható maximális pont, ha a fenti gondolatmenet az átviteli elv használata nélkül szerepel.)

4. feladat (10+4=14 pont)

Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2y \operatorname{ch}(x)}{3x^2 + y^2} & , \text{ ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait a sík minden pontjában.b) A sík mely pontjaiban differenciálható (totálisan) f ? (Indokoljunk.)

Mo. a) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ **(1p)**, akkor

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{2y \operatorname{sh}(x)(3x^2 + y^2) - 12xy \operatorname{ch}(x)}{(3x^2 + y^2)^2} \quad \mathbf{(2p)} \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{2 \operatorname{ch}(x)(3x^2 + y^2) - 4y^2 \operatorname{ch}(x)}{(3x^2 + y^2)^2} \quad \mathbf{(2p)}.$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni.

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \quad \mathbf{(2p)},$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y^2} = +\infty \quad \mathbf{(2p)},$$

tehát $\partial_2 f(0, 0)$ nem létezik **(1p)**.b) Az origóban nem differenciálható f , mert $\partial_2 f(0, 0)$ nem létezik **(2p)**, a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nyílt halmazon **(2p)**.

5. feladat (16+6+6=28 pont)

Legyen

$$f(x, y) := x^5 + y^5 - 5xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

- a) Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát.
 b) Számítsuk ki az f függvény $(1, -1)$ pontbeli $\underline{v} := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ irány menti deriváltját.
 c) Határozzuk meg az f függvény $(1, -1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét.

Mo. a) Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x, y) = 5x^4 - 5y \quad (1\text{p}) \quad \partial_2 f(x, y) = 5y^4 - 5x \quad (1\text{p})$$

$$\left. \begin{array}{l} 5x^4 - 5y = 0 \\ 5y^4 - 5x = 0 \end{array} \right\} \quad (2\text{p}) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\} \quad (4\text{p}),$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak a fenti két pontban lehet lokális szélsőértéke. Minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 20x^3 & -5 \\ -5 & 20y^3 \end{pmatrix} \quad (2\text{p}),$$

tehát

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{pmatrix} \quad (2\text{p}),$$

azaz $H_f(0, 0)$ indefinit, $H_f(1, 1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) (2p), következésképpen az origóban nincs lokális szélsőértéke f -nek, az $(1, 1)$ pontban pedig lokális minimuma van (2p).

b) Az f függvény differenciálható az $(1, -1)$ pontban (1p), ezért

$$D_{\underline{v}} f(1, -1) \stackrel{(2\text{p})}{=} \langle \text{grad} f(1, -1), \underline{v} \rangle \stackrel{(2\text{p})}{=} \left\langle (10, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \right\rangle \stackrel{(1\text{p})}{=} -5\sqrt{2}.$$

c) Az érintősík egy normálvektora:

$$(\partial_1 f(1, -1), \partial_2 f(1, -1), -1) = (10, 0, -1) \quad (2\text{p}),$$

egy pontja:

$$(1, -1, f(1, -1)) = (1, -1, 5) \quad (2\text{p}),$$

tehát az érintősík egyenlete

$$10(x - 1) + 0(y + 1) - (z - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10x - z = 5 \quad (2\text{p}).$$

6. feladat (plusz 10 pontért)Egyenletesen konvergencia \mathbb{R} -en a \sin függvény 0 középpontú Taylor-sora?*Mo.* A \sin függvényt előállítja a Taylor sora \mathbb{R} -en (1p), tehát a kérdés, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(x) - T_{n,0}^{\sin}(x)| = 0$$

teljesül-e (2p). Mivel \sin korlátos, $T_{n,0}^f$ pedig minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén n -edfokú, nem konstans polinom (2p), ezért

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(x) - T_{n,0}^{\sin}(x)| = +\infty$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén (3p), tehát $(T_{n,0}^{\sin})_{n \in \mathbb{N}}$ nem egyenletesen konvergens \mathbb{R} -en (2p).