1. feladat (10+10=20 pont)
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergensek az alábbi sorok? A *b*) részben adjuk meg a hatványsor összegfüggvényét is!

$$a)\ \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{(x-1)^k}{k\cdot 3^k} \qquad\qquad b)\ \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^{2k+1}}{k!}$$

Mo. *a*) Minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_k := \frac{1}{k\cdot 3^k}$. Ekkor

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{3\sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} \quad (\mathbf{3p}),$$

tehát $R_a = 3$ **(1p)** , azaz minden $x \in]-2,4[$ esetén konvergens a sor **(2p)** .
Vizsgáljuk meg az intervallum végpontjait:

- $x = -2$ esetén a $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^k}{k}$ sor a Leibniz-kritérium alapján konvergens **(2p)** ,
- $x = 4$ esetén pedig a $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{k}$ sor divergens **(1p)** ,

tehát összegezve: a sor pontosan akkor konvergens, ha $x \in [-2,4[$ **(1p)** .

b) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén **(2p)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!} = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = xe^{x^2} \quad (\mathbf{8p}).$$

(Ha a hallgató nem jön rá, hogy ez egy nevezetes hatványsor, akkor a konvergenciatartomány helyes meghatározásáért legfeljebb 5 pont jár.)

---

2. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését és a Taylor-sorának konvergenciasugarát!

$$f(x) := \frac{x^2}{9-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 3\})$$

Mo.

$$\frac{x^2}{9-x^2} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{x^2}{9}\frac{1}{1-\frac{x^2}{9}} \underset{(*)}{\overset{(\mathbf{3p})}{=}} \frac{x^2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{9}\right)^k \overset{(\mathbf{2p})}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9^k}x^{2k},$$

ahol a $(*)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $|x| < 3$ **(3p)** , tehát a Taylor-sor konvergenciasugara 3 **(3p)** .

3. feladat (14 pont)
Határozzuk meg az alábbi határértéket (amennyiben létezik)!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} =?$$

Mo. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Első megoldás. Tegyük fel, hogy $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k,y_k)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ **(2p)** . Legyen $(r_k\cos(\varphi_k), r_k\sin(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ az előbbi sorozat polárkoordinátás alakja **(2p)** . Ekkor

$$f(x_k,y_k) = f(r_k\cos(\varphi_k), r_k\sin(\varphi_k)) \overset{\textbf{(4p)}}{=} \frac{r_k^2\left(\cos^2(\varphi_k)+2\cos(\varphi_k)\sin(\varphi_k)\right)}{r_k} =$$
$$= \underbrace{r_k}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0} \underbrace{\left(\cos^2(\varphi_k)+2\cos(\varphi_k)\sin(\varphi_k)\right)}_{\text{korlátos}} \underset{\textbf{(4p)}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

Második megoldás. Tegyük fel, hogy $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$-ban haladó sorozat, amelyre $(x_k,y_k)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ **(2p)** . Ekkor

$$|f(x_k,y_k)| \overset{\textbf{(4p)}}{\le} |x_k|\frac{|x_k|+2|y_k|}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}} \overset{\textbf{(2p)}}{=} |x_k|\left(\sqrt{\frac{x_k^2}{x_k^2+y_k^2}}+2\sqrt{\frac{y_k^2}{x_k^2+y_k^2}}\right) \overset{\textbf{(4p)}}{\le} 3|x_k| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tehát az átviteli elv alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ **(2p)** . (Akkor is adható maximális pont, ha a megoldásban nem szerepel az átviteli elv.)

---

4. feladat (8+6+10+4=28 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+3y^2} & \text{, ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Mikor mondjuk, hogy egy $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$ pontban? Adjunk elégséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra!

b) Folytonos-e az f függvény? (Indokoljunk!)

c) Számítsuk ki f elsőrendű parciális deriváltjait!

d) A sík mely pontjaiban differenciálható f? (Indokoljunk!)

Mo. *a) Definíció:* Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható $\underline{a}$-ban, ha $\underline{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek **(2p)**, és létezik olyan $\underline{A} \in \mathbb{R}^n$, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \langle \underline{A}, \underline{x} - \underline{a} \rangle}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0 \quad (\mathbf{3p}).$$

(A jegyzetben szereplő definíció is maximális pontot ér.)

Elégséges feltétel pontbeli differenciálhatóságra: Ha $\underline{a} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{int}(\mathrm{Dom}(\partial_i f))$, és f minden parciális deriváltfüggvénye folytonos $\underline{a}$-ban (vagy gyengébb feltétel: $\underline{a}$ egy környezetén), akkor f (totálisan) differenciálható $\underline{a}$-ban **(3p)**.

b) $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ és $f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0)$ **(5p)**, tehát az átviteli elv miatt f nem folytonos az origóban **(1p)**.

c) Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **(1p)**, akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{2y(x^2+3y^2) - 4x^2 y}{(x^2+3y^2)^2} \quad (\mathbf{2p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{2x(x^2+3y^2) - 12xy^2}{(x^2+3y^2)^2} \quad (\mathbf{2p})$$

Az origóbeli parciális deriváltakat a definíció segítségével tudjuk kiszámolni **(1p)**:

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0 \quad (\mathbf{2p}) \quad \partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0 \quad (\mathbf{2p}).$$

d) Az origóban nem differenciálható f, mert ott nem folytonos **(2p)**, a sík többi pontjában pedig differenciálható, mert $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonos az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (nyílt) halmazon **(2p)**.

---

5. feladat (14 pont)

Legyen

$$f(x,y) := 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Határozzuk meg f lokális szélsőértékeit és ezek típusát!

Mo. Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y) = 4x + 2y - 2 \quad (\mathbf{1p}) \qquad \partial_2 f(x,y) = 2y + 2x \quad (\mathbf{1p})$$

$$\left.\begin{aligned} 4x+2y-2=0 \\ 2y+2x=0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(2p)} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)=(1,-1) \quad \textbf{(2p)},$$

és f a sík minden pontjában differenciálható, tehát csak az $(1,-1)$ pontban lehet lokális szélsőértéke **(1p)** . Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén (f másodrendű parciális deriváltjai a sík minden pontjában folytonosak)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(3p)},$$

tehát $H_f(1,-1)$ pozitív definit (pl. főminorokkal indokolva) **(2p)** , következésképpen f-nek lokális minimuma van az $(1,-1)$ pontban **(2p)**

---

6. feladat (10 pont)
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol H a $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ csúcspontok által meghatározott háromszög, és

$$f(x,y) := 4xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)\,.$$

Mo.

$$H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2-x\big\}\,,$$

tehát normáltartományon integrálunk **(2p)** :

$$\int\limits_H f \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2-x} 4xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int\limits_0^2 \big[2xy^2\big]_{y=0}^{2-x} \,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=} \int\limits_0^2 2x(2-x)^2 \,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=}$$

$$= \int\limits_0^2 8x - 8x^2 + 2x^3 \,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(1p)}}{=} \left[4x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right]_{x=0}^2 \overset{\textbf{(1p)}}{=} \frac{8}{3}.$$

IMSc feladat (15 IMSc pont) Határozzuk meg az arcsin függvény 0 középpontú Taylor-sorfejtését!

Mo. Minden $x \in]-1,1[$ esetén $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(3p)** , továbbá a binomiális sorfejtés alkalmazásával

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k} \quad \textbf{(5p)}.$$

Ebből pedig minden $x \in]-1,1[$ esetén a hatványsorok tulajdonságai alapján **(2p)**

$$\arcsin(x) = \int_0^x \arcsin'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (\mathbf{5p}).$$
