

1. feladat (3+10=13 pont)

- a) Ismertesse az algebra alaptételét!
b) Határozza meg a $z^4 + 8z = 0$ egyenlet gyökeit.

Mo. a) Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van gyöke. **(3p)**

b) $0 = z^4 + 8z = z(z^3 + 8)$, ha $z = 0$ **(2p)** vagy $z^3 = 8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$ **(3p)**. Így az egyenlet gyökei: $z_1 = 0$, $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$,
 $z_3 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = -2$, $z_4 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i$. **(5p)**

2. feladat (10 pont)

Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$ függvény? Adja meg a függvény inflexiós pontjait!

Mo. $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0$, tehát $D_f = \mathbb{R}$ **(1p)**. $f'(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10}$, **(2p)**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 6x + 10) - (2x - 6)^2}{(x^2 - 6x + 10)^2} = \frac{-2x^2 + 12x - 16}{(x^2 - 6x + 10)^2} = 0, \quad \textbf{(3p)}$$

ha $x^2 - 6x + 8 = 0$, vagyis $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = 3 \pm 1$, vagyis f konvex a $(2, 4)$ intervallumon, konkáv a $(-\infty, 2)$ és $(4, \infty)$ intervallumokon, és az $x = 2$, $x = 4$ pontokban inflexiós pontja van. **(4p)**

3. feladat (3+10=13 pont)

- a) Ismertesse a parciális integrálás módszerét.
b) Számolja ki az $\int e^{-2x} \sin(3x) dx$ integrált!

Mo. a)

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{e^{-2x}}_u \underbrace{\sin(3x)}_{v'} dx \stackrel{\textbf{(3p)}}{=} -\frac{e^{-2x} \cos(3x)}{3} - \frac{2}{3} \int \underbrace{e^{-2x}}_u \underbrace{\cos(3x)}_{v'} dx = \\ &\stackrel{\textbf{(4p)}}{=} -\frac{e^{-2x} \cos(3x)}{3} - \frac{2e^{-2x} \sin(3x)}{9} - \frac{4}{9} \cdot I, \end{aligned}$$

$$\text{így } I = \frac{9}{13} \left(-\frac{e^{-2x} \cos(3x)}{3} - \frac{2e^{-2x} \sin(3x)}{9} \right) = \left(\frac{-3 \cos(3x)}{13} - \frac{2 \sin(3x)}{13} \right) e^{-2x} \quad \textbf{(3p)}$$

4. feladat (14 pont)

Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatot

$$y' = \cos^2 y \cdot \sin^2 x, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Mo. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet, $\cos^2 y \equiv 0$, vagyis $y \equiv \frac{(2k+1)\pi}{2}$
megoldás **(3p)** .

$$\operatorname{tg} y \stackrel{(2p)}{=} \int \frac{1}{\cos^2 y} dy \stackrel{(2p)}{=} \int \sin^2 x dx \stackrel{(2p)}{=} \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \stackrel{(2p)}{=} \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

A kezdeti feltételből $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = c$ **(2p)** , tehát a megoldás

$$\operatorname{tg} y = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + 1 \quad \textbf{(1p)}$$

5. feladat (10+10=20 pont)

a) Mondja ki, és igazolja a minoráns kritériumot!

b) Abszolút konvergens, feltételesen konvergens, vagy divergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{n^2 - 2n + 3}$ sor?

Mo.

6. feladat (5+10=15 pont*)

a) Ismertesse a síkbeli polárkoordinátákat (rajzban), adja meg a kapcsolatot a polár- és a Descartes-koordináták között, és adja meg (bizonyítás nélkül) az áttérés Jacobi determinánsát!

b) Számolja ki az $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ függvény integrálját az $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$, $x \leq 0$ halmazon!

Mo. a) rajz **(2p)** , $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, **(2p)** $J = r$ **(1p)** .

$$b) \int_T \frac{1}{x^2 + y^2} dT \stackrel{(4p)}{=} \int_1^3 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{r^2} \cdot r d\varphi dr \stackrel{(4p)}{=} \frac{\pi}{2} [\ln r]_1^3 = \frac{\pi \ln 3}{2}$$

7. feladat (5+10=15 pont*)

a) Hogyan fejezhető ki az f függvény Fourier-traszformáltjából az $x \rightarrow f(x+a)$ függvény Fourier-traszformáltja?

b) Számolja ki az $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in [2, 3] \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$ függvény Fourier-traszformáltját!

A *-os feladatokból legalább 12 pontot kell elérni.