

1. feladat (4+10=14 pont)

- a) Mondja ki a rendőrelvet!
b) Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^3 + 4n + 1}{5n^2 + n - 4}}$$

sorozat határértékét.

-
- Mo. a) Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ **(4p)**.
b) A rendőrelv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ **(2p)**, mert ($n \geq 4$ esetén)

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{(1p)}{\leftarrow} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{5}} \stackrel{(1p)}{=} \sqrt[n]{\frac{n}{5}} \stackrel{(2p)}{\leq} \sqrt[n]{\frac{2n^3 + 4n + 1}{5n^2 + n - 4}} \stackrel{(2p)}{\leq} \sqrt[n]{\frac{2n^3 + 4n^3 + n^3}{5n^2}} \stackrel{(1p)}{=} \\ &\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{7/5} \stackrel{(1p)}{\rightarrow} 1 \end{aligned}$$

2. feladat (4+10=14 pont)

- a) Ismertesse a l'Hospital-szabályt!
b) Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \frac{e^{3x^3} - \cos(2x)}{x^2 - x}$ függvénynek?

-
- Mo. a) Analízis 1 jegyzet, 4.4 fejezet. **(4p)**
b) A függvény folytonos függvények összetétele, így a nevező zérushelyeit ($x = 0$ és $x = 1$) leszámítva folytonos **(2p)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{(3p)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2 e^{3x^3} + 2 \sin(2x)}{2x - 1} \stackrel{(1p)}{=} 0$, így a függvénynek az $x = 0$ pontban megszüntethető szakadása van **(1p)**.
 $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x) \stackrel{(2p)}{=} \pm \infty$, így a függvénynek az $x = 1$ pontban másodfajú szakadása van **(1p)**.

3. feladat (10 pont)

Megfelelő helyettesítéssel számolja ki a $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x} + 4}} dx$ integrált ($x \geq 0$)!

Mo. Az $y = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = y^2$ **(1p)** tehát az integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x} + 4}} dx &\stackrel{(2p)}{=} \int \frac{2y}{y^2 + 4y + 4} dy \stackrel{(4p)}{=} \int \frac{2y + 4}{y^2 + 4y + 4} - \frac{4}{(y + 2)^2} dy = \\ &\stackrel{(2p)}{=} 2 \ln(y + 2) + \frac{4}{y + 2} + c \stackrel{(1p)}{=} 2 \ln(\sqrt{x} + 2) + \frac{4}{\sqrt{x} + 2} + c \end{aligned}$$

4. feladat (12 pont)

Írja föl azt a legalacsonyabb rendű homogén lineáris, állandó (valós) együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x) = 2e^x \cos(3x) + 5x^2$ függvény! Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

Mo. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ egyszeres **(2p)**, $\lambda_{3,4,5} = 0$ **(2p)** háromszoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ami így: $\lambda^3((\lambda - 1)^2 + 9) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 10\lambda^3$ **(3p)**, vagyis a differenciálegyenlet $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 10y^{(3)} = 0$ **(2p)**, az általános megoldás pedig $y = c_1 e^x \cos(3x) + c_2 e^x \sin(3x) + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$ **(3p)**.

5. feladat (6+14=20 pont)

a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális maximuma, illetve minimuma legyen!

b) Keresse meg az $f(x, y) = x^3 + 6xy - 2y^2 + 6x$ függvény lokális szélsőértékeit, és jellemezze őket (minimum/maximum)!

Mo. a) Ha f kétszer deriválható x_0, y_0 -ban, $\text{grad } f(x_0, y_0) = 0$ és a másodrendű parciális deriváltakból képzett $H(x_0, y_0)$ Hesse-mátrix pozitív definit, akkor f -nek (x_0, y_0) -ban lokális minimuma van, ha pedig $H(x_0, y_0)$ negatív definit, akkor (x_0, y_0) -ban lokális maximum van. **(6p)**

b) Szükséges feltétel: $f'_x(x, y) = 3x^2 + 6y + 6 = 0$ és $f'_y(x, y) = 6x - 4y = 0$ **(4p)**.

Ennek megoldásai: $(x_1, y_1) = (-1, -3/2)$ és $(x_2, y_2) = (-2, -3)$ **(4p)**.

A Hesse-determináns: $H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -24x - 36$ **(3p)**.

$H(x_1, y_1) = -12 < 0$, tehát itt nincs lokális szélsőérték **(1p)**;

$H(x_2, y_2) = +12 > 0$, és $f''_{xx}(x_2, y_2) = -12 < 0$, tehát itt lokális maximum van **(2p)**.

6. feladat (9+9=18 pont*)

a) Ismertesse a gömbi koordinátákat (rajzban), adja meg a kapcsolatot a gömbi és a Descartes-koordináták között, és írja föl az áttérés 3×3 -as Jacobi determinánsát! (A determinánst nem kell kifejteni.)

b) Számolja ki az $f(x, y, z) = z$ függvény integrálját az origó középpontú 1 sugarú gömb $z \geq 0$ részén!

Mo. a) rajz: **(3p)**, x, y, z felírása **(3p)**, determináns felírása **(3p)**.

$$b) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 2\pi \left[\frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Integrál felírása **(4p)**; ϑ és r szerinti integrál **(2p)** - **(2p)**; φ szerinti **(1p)**.

7. feladat (12 pont*)

Határozza meg a 2π szerint periodikus, $x \in (-\pi, +\pi]$ esetén az $f(x) = x - |x|$ képlettel definiált függvény Fourier-sorában az a_n együtthatókat ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$), valamint adja meg a Fourier-sor Φ összegfüggvényét azokban a pontokban, ahol f -től eltér!

$$\text{Mo. } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in (-\pi, 0] \\ 0, & \text{ha } x \in [0, \pi] \end{cases} \quad \mathbf{(2p)}; a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = -\pi \quad \mathbf{(2p)}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos(kx) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^0 - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(kx)}{k} dx = \frac{2(1 - (-1)^k)}{k^2 \pi} \end{aligned} \quad \mathbf{(6p)}$$

A Dirichlet-tétel alapján az f szakadási helyein, azaz a $(2n+1)\pi$ pontokban ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\Phi((2n+1)\pi) = \frac{f((2n+1)\pi + 0) + f((2n+1)\pi - 0)}{2} = -\pi \neq f((2n+1)\pi) = 0. \quad \mathbf{(2p)}$$

A *-os feladatokból legalább 12 pontot kell elérni.