*** 1. feladat (12+12=24 pont)**
Számítsuk ki az $\int\limits_H f$ integrál értékét, ahol

a)

$$f(x,y) := 2xy \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)\,,$$

H pedig az $y = x$ és $y = x^2$ egyenletű alakzatok által határolt korlátos tartomány;

b)

$$f(x,y.z) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^2\big)\,,$$
$$H := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le x^2+y^2\}.$$

Mo. a)

$$H = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\big\}\,,\quad (\mathbf{2p}).$$

H normáltartomány, f folytonos H-n **(1p)** , tehát:

$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^x 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1 \big[xy^2\big]_{y=x^2}^x\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^1 x^3-x^5\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^1 \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{12}.$$

b) Hengerkoordinátákkal

$$\int\limits_H f \overset{(\mathbf{4p})}{=} \int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r^2} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} \int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r^2} r^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$
$$= 2\pi\int\limits_0^2 r^4\,\mathrm{d}r \overset{(\mathbf{2p})}{=} 2\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^2 \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{64\pi}{5}.$$

(Normáltartományos próbálkozásért maximum 2 pont adható.)

*** 2. feladat (10 pont)**
Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ abszolút integrálható függvény. Fejezzük ki az

$$\mathscr{F}\big(x\mapsto f(2x+3)\big)$$

Fourier-transzformáltat az f függvény Fourier-transzformáltjának segítségével.

Mo. Minden $\omega\in\mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{F}(x\mapsto f(x+3))(\omega) = e^{3\mathbf{i}\omega}\mathscr{F}(f)(\omega) \qquad (\mathbf{5p})$$
$$\mathscr{F}(x\mapsto f(2x+3))(\omega) = \frac{1}{2}e^{3\mathbf{i}\frac{\omega}{2}}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (\mathbf{5p})$$

Alternatív megoldás a Fourier-transzformált definíciójával, majd a $t = 2x+3$, ($x = \frac{t}{2}-\frac{3}{2}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$) helyettesítéssel:

$$\mathscr{F}\big(x\mapsto f(2x+3)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega x} f(2x+3)\,\mathrm{d}x = \qquad (\mathbf{2p})$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}\omega\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\right)} f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \qquad (\mathbf{5p})$$
$$= \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}\mathbf{i}\omega}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\omega}{2}\right). \qquad (\mathbf{3p})$$

3. feladat (7+7+7=21 pont)

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n-3}\right)^{2n+1}=? \qquad b)\ \int \cos^3(x)\sin^4(x)\,\mathrm{d}x=? \qquad c)\ \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x=?$$

Mo. *a)*

$$\left(\frac{1+n}{n-3}\right)^{2n+1} \overset{(\mathbf{4p})}{=} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}\right)^2 \left(\frac{1+n}{n-3}\right) \underset{(\mathbf{3p})}{\xrightarrow{n\to\infty}} \left(\frac{e}{e^{-3}}\right)^2 = e^8,$$

b)

$$\int \cos^3(x)\sin^4(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{3p})}{=} \int \cos(x)(1-\sin^2(x))\sin^4(x)\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{\sin^5(x)}{5}-\frac{\sin^7(x)}{7}+C \quad (C\in\mathbb{R}) \quad .$$

c)

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{3p})}{=} \int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \overset{(\mathbf{3p})}{=} \operatorname{arctg}(x+2)+C \quad (C\in\mathbb{R})$$

4. feladat (12+4=16 pont)
Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{, ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Folytonos-e az f függvény?

b) Differenciálható-e f az origóban?

Mo. *a)* Az f függvény folytonos az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ halmaz minden pontjában **(2p)** , tehát a kérdés megválaszolásához elég az origóbeli folytonosságot vizsgálnunk. $\left(\frac{1}{k},0\right) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ **(2p)** , és

$$f\left(\frac{1}{k},0\right) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 1\ (\mathbf{1p})} \cdot k \underset{(\mathbf{1p})}{\xrightarrow{k\to\infty}} +\infty \quad (\mathbf{1p}),$$

tehát az átviteli elv alapján f nem folytonos az origóban **(1p)** , következésképpen nem folytonos **(1p)** .

b) Az előző pont alapján f nem folytonos az origóban, így ott nem is differenciálható **(4p)** .

5. feladat (7+8=15 pont)
Konvergensek-e az alábbi sorok? Adjuk meg a *b)* pontban szereplő sor összegét is, amennyiben létezik.

$$a)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3+2}{n^5+3n^2} \qquad\qquad b)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{n+1}}{(2n)!}$$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^3+2}{n^5+3n^2} \overset{\textbf{(4p)}}{\leq} \frac{3n^3}{n^5} = \frac{3}{n^2},$$

és a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \frac{3}{n^2}$ sor konvergens **(2p)** , tehát a majoráns kritérium alapján az eredeti is az **(1p)** .

b) Nevezetes sorösszegről van szó:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n)!} \overset{\textbf{(4p)}}{=} 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \overset{\textbf{(3p)}}{=} 2 \cdot \operatorname{ch}(\sqrt{2}),$$

amiből a konvergencia is adódik **(1p)** .

---

6. feladat (4+10=14 pont)
Mondjuk ki és bizonyítsuk be a monoton és korlátos sorozatok konvergenciájáról szóló tételt.

Mo. ...
