

ANALÍZIS(2) TÉTELEK

BME, VIK, Mérnök Informatikus szakos hallgatói részére, BSC

(A * -gal jelöltek bizonyításait nem kérdezzük.)

I. Differenciálegyenletek

- (1) * Szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása.
- (2) Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.
- (3) Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak.
- (4) Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. (Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).
- (5) * Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik megoldása megkereshető a konstans variálás módszerével.
- (6) Új változó bevezetése elsőrendű differenciálegyenletbe.
- (7) Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a differenciálegyenlet hez tartozó iránymezőben, az izoklinák módszere.
- (8) A differenciálegyenlet megoldásait közelítő Taylor polinomok számolása.
- (9) * n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.
- (10) * n-edrendű homogén lineáris diff. egy. megoldásainak tere n-dimenziós.
- (11) n-edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletnek létezik $e^{\lambda x}$ alakú megoldása (karakterisztikus polinom).
- (12) * Ha egy valós együtthatós n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek megoldása a $z(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, ahol y_1, y_2 valós, akkor y_1 és y_2 is megoldások.
- (13) * n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. (Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).
- (14) * n-edrendű inhomogén lineáris diff. egyenlet partikuláris megoldásának keresése speciális zavarófüggvény esetén próbafüggvénnyel.
- (15) * Fizikai és geometriai alkalmazások.

II. Lineáris rekurziók

- (1) * Lineáris rekurzív egyenlet megoldásainak a tere.
- (2) * Fibonacci típusú egyenletek megoldásának egyértelműsége.
- (3) * Fibonacci sorozat. (A rekurzió feloldása.)

III. Numerikus és függvénysorok

- (1) A sor abszolút konvergenciájából következik a sor konvergenciája.
- (2) Majoráns, minoráns kritérium.
- (3) Hányados kritérium.
- (4) * Hányados kritérium limeszes alakja.
- (5) Gyök kritérium.
- (6) * Gyök kritérium limeszes alakja.
- (7) Függvénysor egyenletes konvergenciájából következik a pontonkénti konvergencia.
- (8) Egyenletesen konvergens függvénysor teljesíti a Cauchy kritériumot.
- (9) * Ha a függvénysor teljesíti a Cauchy kritériumot, akkor egyenletesen konvergens.
- (10) Az egyenletes és abszolút konvergencia elégséges feltéle (Weierstrass kritérium).

IV. Hatványsorok

- (1) * Egy adott pontban konvergens hatványsor tulajdonsága.
- (2) * Egy adott pontban divergens hatványsor tulajdonsága.
- (3) * Hatványsor konvergenciatartománya intervallum.
- (4) Formulák az R konvergenciasugárra $0 < R < \infty$ esetén.
- (5) * Formulák az R konvergenciasugárra $R = 0$ és $R = \infty$ esetén.
- (6) * Hatványsor abszolút és egyenletes konvergenciája.
- (7) * Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.
- (8) * Hatványsor összegfüggvényének integrálja.
- (9) * Hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor konvergencia sugara.
- (10) * Hatványsor összegfüggvényének deriválhatósága, a derivált hatványsora.
- (11) A függvényt n -ed rendben érintő, legfeljebb n -ed rendű polinom egyértelműsége (Taylor polinom).
- (12) Hatványsor alakban adott függvény Taylor sora. (Kapcsolat egy analitikus függvény és az a_k együtthatók között.)
- (13) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$
- (14) * Lagrange féle maradéktag alakja.
- (15) A geometriai sorból levezethető Taylor sorok.
- (16) $\ln(1+x)$, $\arctan x$ függvények megegyeznek a Taylor soraikkal a $(-1, 1)$ -on.
- (17) Elégséges feltétel függvény és Taylor sorának egyenlőségére.
- (18) Az e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ és a $\operatorname{ch} x$ függvény megegyezik a Taylor sorával a $(-\infty, \infty)$ -on.
- (19) Binomiális sor konvergencia tartományának sugara.
- (20) * Binomiális sor összegfüggvénye.
- (21) $f(x) = \arcsin x$ függvény megegyezik a Taylor sorával a $(-1, 1)$ -on.
- (22) Alkalmazások: függvényérték, integrál közelítő értékének számolása, a hiba becslése, határérték meghatározása.

V. Fourier sorok

- (1) * A trigonometrikus rendszer ortonormáltsága, függetlenség.
- (2) Az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor együtthatóinak egyértelműsége. (Kapcsolat a ϕ összegfüggvény és az a_k, b_k együtthatók között.)
- (3) A Fourier együtthatók kiszámítása.
- (4) Összeg, konstansszoros Fourier sora.
- (5) Páros és páratlan függvény Fourier sora.
- (6) * Elegséges feltétel Fourier sor egyenletes konvergenciájára.
- (7) * Dirichlet tétel (Fourier sor pontonkénti konvergenciája.)

VI. Többváltozós függvények folytonossága

- (1) * n-dimenziós euklideszi tér pontsorozatainak koordinátánkénti konvergenciája.
- (2) Többváltozós függvények limesze. Az átviteli elv alkalmazása (példák).
- (3) * Többváltozós folytonos függvényekből összetett függvény folytonossága.
- (4) * Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai (W. I., W. II., egyenletes folyt.).

VII. Többváltozós függvények differenciálhatósága

- (1) Többváltozós függvény totális differenciálhatóságának és a folytonosságának a kapcsolata. (Tot. diffh.-ből következik a folytonosság, de a folytonoságból nem következik a tot. diffh.)
- (2) Többváltozós függvény totális differenciálhatóságának és a parciális deriváltak létezésének a kapcsolata. (Tot. diffh.-ből következik a parciális deriváltak létezése, de a parciális deriváltak létezéséből nem következik a tot. diffh..)
- (3) * A differenciálhatóság elégséges feltétele (parciális deriváltak folytonossága).
- (4) Kétféle változós függvény grafikonjának (felület) érintősíkja.
- (5) * Többváltozós függvények differenciálására vonatkozó láncszabály. (m-változósba egyváltozóst vagy két-három változósba két-három változóst helyettesítve.)
- (6) Iránymenti derivált meghatározása (elégséges feltétel).
- (7) A maximális illetve a minimális iránymenti derivált iránya és nagysága. (A gradiensvektor iránya és nagysága.)
- (8) * Young tétel.
- (9) Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
- (10) * Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele (m=2).
- (11) * Kompakt tartományon folytonos függvény abszolút szélsőértékének a számolása.

VIII. Többváltozós függvények integrálja

- (1) * Kettős integrál és kétszeres integrál kapcsolata téglalapon.
- (2) * Kettős integrál és kétszeres integrál kapcsolata normáltartományokon.
- (3) * Kettős és hármas integrál transzformációja (polár, henger és gömbi koordináták).
- (4) * $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx$ meghatározása.
- (5) * Kettős és hármas integrál gyakorlati alkalmazása (terület, térfogat).

IX. Komplex változós komplex értékű függvények

- (1) * Komplex függvény folytonossága.
- (2) * Komplex $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény differenciálhatóságának szükséges és elégséges feltétele (Cauchy-Riemann egyenletek és *uill.* v totális diff.hatósága).
- (3) Komplex $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény differenciálhatóságának elégséges feltétele (Cauchy-Riemann egyenletek és u'_x, u'_y ill. v'_x, v'_y folytonossága).
- (4) * Ha f reguláris egy pontban, akkor ott léteznek az $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ és $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$ magasabb rendű parciális deriváltjai.
- (5) Ha f reguláris, akkor az $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ és $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$ megoldásai a síkbeli Laplace egyenletnek ($g''_{xx} + g''_{yy} = 0$), azaz u és v harmónikus.
- (6) * Ha az $u(x, y)$ harmónikus, akkor létezik harmónikus társa, azaz létezik olyan f reguláris függvény hogy $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ és létezik $v(x, y)$, hogy $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$.
- (7) * Ha a $v(x, y)$ harmónikus, akkor létezik olyan f regulárisfüggvény hogy $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$, azaz létezik $u(x, y)$, melynek $v(x, y)$ harmónikus társa.
- (8) Az e^z periódikussága, értékkészlete.
- (9) Az $\ln z$ értelmezési tartománya, értékkészlete, értékének meghatározása. (Az $\ln z$ valós és képzetes része.)
- (10) e^z regularitása, deriváltja.
- (11) Az $\sin z, \cos z$ értékének meghatározása. (A valós és képzetes részük.)
- (12) A $\sin z, \cos z$ illetve a $\sinh z, \cosh z$ közötti kapcsolatok.
- (13) * Komplex függvény görbe menti integráljának számolása:

$$\int_L f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) z'(t) dt$$

- (14) * A Cauchy-Goursat féle alaptétel. (Reguláris függvény zárt görbe menti integrálja egyszeresen összefüggő tartományon nulla.)
- (15) * A Cauchy-Goursat féle alaptétel következményei.
- (16) $(z - z_0)^{-1}$ körintegrálja.
- (17) $(z - z_0)^n$ körintegrálja ($n = -2, -3, -4, \dots$).
- (18) * Cauchy-féle integrálformula. (Reguláris függvény integrál alakja).
- (19) * Cauchy-féle integrálformulák. (Reguláris függvény deriváltjainak integrál alakja).

Összeállította: Fritz Józsefné, Kónya Ilona, Tasnádi Tamás