ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. jún. 9.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathrm{R}$ megoldása az

$$y' = y^3 + (x-1)^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy a $(2,-1)$ ponton.

Adja meg a következő értékeket: $y'(2)\,,\ y''(2)\,,\ y'''(2)\,!$

Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = 2$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

2. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!

$$f(x) = \operatorname{ch}(4\,x^2)\,, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+4x}}$$

Mindkét esetben írja le az a_4 együttható értékét elemi műveletekkel!

3. feladat (14 pont)

A tanult módszerrel mutassa meg, hogy

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$$

Mi a Taylor sor konvergenciasugara?
Ennek felhasználásával adja meg a

$$g(x) = \operatorname{arctg} 4x^2$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

4. feladat (19 pont)

a) Az $\underline{a}$ pont egy környezetében létezik az f függvény gradiense.

$\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = ?$ Milyen irányban kapjuk?

Állítását <u>bizonyítsa be</u>!

b)

$$f(x,y) = \frac{x+2y}{2x+3y} \qquad (x_0,y_0) = (1,-1)$$

1. $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = ?$ $\qquad \mathrm{d}f\,((x_0,y_0),(h,k)) = ?$
2. Milyen irányban lesz az (x_0,y_0) pontban az iránymenti derivált maximális?
   Adja meg az egységvektort!
   Adja meg ezt a maximális értéket is!

5. feladat (8 pont)*

$$\iint_T e^{2y-3x}\ dT\ = ?$$

a) $T:\ 0\le x\le R\,, -R\le y\le 0 \quad (R>0)$
b) $T:\ x\ge 0\,,\quad y\le 0$

6. feladat (10 pont)*

Adja meg a Descartes koordináták és a gömbi koordináták közötti kapcsolatot!
(Egy ábrán mutassa meg a gömbi koordináták jelentését!)

Gömbi koordináták segítségével írja le az alábbi térrészt!

$$x^2+y^2+z^2\le 9\,,\quad z\ge\sqrt{3x^2+3y^2}\,,\quad y\ge 0$$

7. feladat (11 pont)*

$$u(x,y)=x^3-3xy^2-2xy$$

a) Mutassa meg, hogy u mindenütt harmonikus!
b) Keresse meg az összes olyan reguláris komplex változós f függvényt, melynek u a valós része ! $\quad (f(z)\ = ?\ )$

8. feladat (14 pont)*

a) Hogyan számoljuk ki $\ln z$, illetve $\operatorname{Ln} z$ értékét?
b) Adja meg az alábbi z_i komplex számok valós és képzetes részét!

$$z_1=e^{1-3j}\,;\qquad z_2=\ln(-4j)\,;\qquad z_3=\operatorname{Ln}(-4j)\,;\qquad z_4=(-4j)^{2j}\,;\qquad z_5=\ln(0)$$

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y'-\frac{3}{x}\,y=-2$$

10. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0=2$ ponthoz tartozó Taylor sorait és adja meg azok konvergencia tartományát!

$$f(x)=e^{x+7}\,,\qquad\qquad g(x)=\frac{1}{x+8}$$