ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak **VIZSGADOLGOZAT** **2011. jún. 9.**
Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása az

$$y' = y^3 + (x-1)^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy a $(2, -1)$ ponton.

Adja meg a következő értékeket: $y'(2)$, $y''(2)$, $y'''(2)$!

Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = 2$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

$y(2) = -1$

$y'(2) = -1 + 1 = 0$ 1

$y'' = 3y^2 y' + 2(x-1)$ 2 $\qquad y''(2) = 2$ 1

$y''' = (6yy')y' + 3y^2 y'' + 2$ 3 $\qquad y'''(2) = 8$ 1

$$T_3(x) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{y'''(2)}{3!}(x-2)^3 =$$

$$= -1 + \frac{2}{2}(x-2)^2 + \frac{8}{6}(x-2)^3 \quad 4$$

2. feladat (12 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!

$$f(x) = \operatorname{ch}(4x^2), \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+4x}}$$

Mindkét esetben írja le az a_4 együttható értékét elemi műveletekkel!

$$\operatorname{ch} u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!} \;;\; R = \infty$$

$$f(x) = \operatorname{ch}(4x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n} x^{4n}}{(2n)!} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16^n \cdot x^{4n}}{(2n)!} \right)$$

$$R_f = \infty \;;\; a_4 = \frac{16}{2!}$$

$$(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} u^n \;;\; R = 1$$

$$g(x) = (1+4x)^{-1/5} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} (4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} 4^n x^n$$

$$|4x| = 4|x| < 1 \implies |x| < \frac{1}{4} \implies R_g = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \binom{-1/5}{4} 4^4 = \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{11}{5}\right)\left(-\frac{16}{5}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 4^4$$

an2v-110609/1.

3. feladat (14 pont)

A tanult módszerrel mutassa meg, hogy

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$$

Mi a Taylor sor konvergenciasugara?
Ennek felhasználásával adja meg a

$$g(x) = \operatorname{arctg} 4x^2$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

$$|q| = |-x^2| = |x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (\operatorname{arctg} t)' \, dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots) \, dt =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \pm \ldots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots \quad 7$$

$R = 1$ (változatlan) 1

$$g(x) = \operatorname{arctg} 4x^2 = 4x^2 - \frac{4^3}{3} x^6 + \frac{4^5}{5} x^{10} - \frac{4^7}{7} x^{14} \pm \ldots \quad 4$$

$$|4x^2| = 4|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow R_g = \frac{1}{2} \quad 2$$

4. feladat (19 pont)

a) Az $\underline{a}$ pont egy környezetében létezik az f függvény gradiense.

$\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{\underline{a}} = ?$ Milyen irányban kapjuk?

Állítását bizonyítsa be!

b)

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{2x + 3y} \qquad (x_0, y_0) = (1, -1)$$

1. grad $f(x_0, y_0) = ?$ $\quad df((x_0, y_0), (h, k)) = ?$
2. Milyen irányban lesz az (x_0, y_0) pontban az iránymenti derivált maximális?
   Adja meg az egységvektort!
   Adja meg ezt a maximális értéket is!

a) T Ha $\exists$ grad$f$ $K_{\underline{a}}$-ban, akkor

2 $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{\underline{a}} = |\text{grad}\, f(\underline{a})|$ és

$\underline{e} \parallel \text{grad} f(\underline{a})$ irányban kapjuk.

B grad f létezése miatt használható az elégséges tétel az iránymenti derivált kiszámítására: $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{\underline{a}} = \text{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$

an2v11060912

$\Rightarrow \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = |\text{grad } f(\underline{a})| \underbrace{|\underline{e}|}_{=1} \cdot \cos\varphi = |\text{grad } f(\underline{a})| \cos\varphi$

Akkor maximális, ha $\cos\varphi = 1$, tehát $\varphi = 0$

$\Rightarrow \max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{\underline{a}} = |\text{grad } f(\underline{a})|$ 5

$\underline{e} = \frac{\text{grad } f(\underline{a})}{|\text{grad } f(\underline{a})|}$ irányban kapjuk

b1) $f'_x = \frac{1\cdot(2x+3y) - (x+2y)\cdot 2}{(2x+3y)^2}$ 2

$f'_y = \frac{2\cdot(2x+3y) - (x+2y)\cdot 3}{(2x+3y)^2}$ 2

$\text{grad } f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\,\underline{i} + f'_y(x_0,y_0)\,\underline{j} = \underline{i} + \underline{j}$ 2

$df((x_0,y_0),(h,k)) = f'_x(x_0,y_0)\,h + f'_y(x_0,y_0)\,k = h + k$ 2

b2.) $\underline{e} = \frac{\text{grad } f(x_0,y_0)}{|\text{grad } f(x_0,y_0)|} = \frac{\underline{i}+\underline{j}}{|\underline{i}+\underline{j}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$ 2

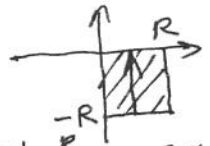
$\max \frac{df}{d\underline{e}}\Big|_{(x_0,y_0)} = |\text{grad } f(x_0,y_0)| = \sqrt{2}$ 2

5. feladat (8 pont)*

$$\iint_T e^{2y-3x}\, dT = ?$$

a) $T:\ 0 \le x \le R\,, -R \le y \le 0 \quad (R > 0)$
b) $T:\ x \ge 0, \quad y \le 0$

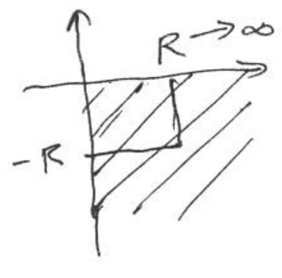
a.) $I_R = \int_{x=0}^{R}\int_{y=-R}^{0} e^{2y} e^{-3x}\, dy\, dx =$



$\boxed{6}$

$= \int_{x=0}^{R} e^{-3x} \frac{e^{2y}}{2}\Big|_{y=-R}^{0} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-2R}) \int_0^R e^{-3x}\, dx =$

$= \frac{1}{2}(1 - e^{-2R}) \frac{e^{-3x}}{-3}\Big|_{x=0}^{R} = -\frac{1}{6}(1 - e^{-2R})(e^{-3R} - 1)$



b.) $I_b = \lim_{R\to\infty} I_R =$

$\boxed{2}$

$= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{6}(1 - \underset{\downarrow\, 0}{e^{-2R}})(\underset{\downarrow\, 0}{e^{-3R}} - 1) = \frac{1}{6}$

an2v-110609/3.

6. feladat (10 pont)*

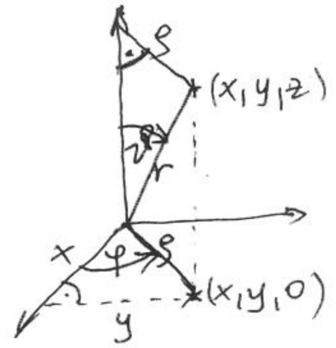
Adja meg a Descartes koordináták és a gömbi koordináták közötti kapcsolatot! (Egy ábrán mutassa meg a gömbi koordináták jelentését!)

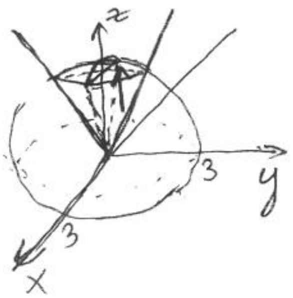
Gömbi koordináták segítségével írja le az alábbi térrészt!

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \quad y \geq 0$$

Gömbi koordináták: r, ϑ, φ

6 $\left\{ \begin{array}{l} x = \varrho \cos\varphi = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \varrho \sin\varphi = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cos\vartheta \end{array} \right.$

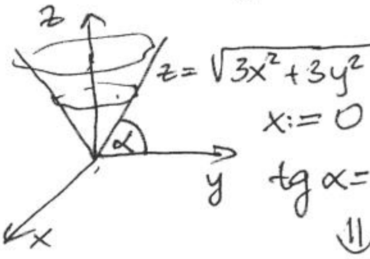




$0 \leq r \leq 3$ (1)

$0 \leq \varphi \leq \pi$ (1)

$0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6}$ (2)



$x := 0 : z = \sqrt{3}|y|$

$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$

$\Downarrow$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\Downarrow$

$\vartheta_{max} = \frac{\pi}{6}$

7. feladat (11 pont)*

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2xy$$

a) Mutassa meg, hogy u mindenütt harmonikus!

b) Keresse meg az összes olyan reguláris komplex változós f függvényt, melynek u a valós része ! $(f(z) = ?)$

a.) $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$-nak kell teljesülnie.

$\boxed{4}$

$u'_x = 3x^2 - 3y^2 - 2y \qquad u''_{xx} = 6x$

$u'_y = -6xy - 2x \qquad u''_{yy} = -6x$

$+ \quad \Delta u = 6x - 6x \equiv 0 \Rightarrow u$ harmonikus

b.) $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$ miatt:

$\boxed{7}$

$v'_x = 6xy + 2x \qquad (1)$

$v'_y = 3x^2 - 3y^2 - 2y \qquad (2)$

(1)-ből: $v(x,y) = \int (6xy + 2x)\,dx = 3x^2y + x^2 + C(y)$

Ezt (2)-be behelyettesítve:

$$3x^2 + C'(y) = 3x^2 - 3y^2 - 2y \Rightarrow C'(y) = -3y^2 - 2y$$

$$\Rightarrow C(y) = -y^3 - y^2 + K$$

Tehát $v(x,y) = 3x^2y + x^2 - y^3 - y^2 + K$

(Vagyis $f(z) = x^3 - 3xy^2 - 2xy + j\,(3x^2y + x^2 - y^3 - y^2 + K)$)

8. feladat (14 pont)*

a) Hogyan számoljuk ki $\ln z$, illetve $\operatorname{Ln} z$ értékét?

b) Adja meg az alábbi z_i komplex számok valós és képzetes részét!

$z_1 = e^{1-3j}$; $\quad z_2 = \ln(-4j)$; $\quad z_3 = \operatorname{Ln}(-4j)$; $\quad z_4 = (-4j)^{2j}$; $\quad z_5 = \ln(0)$

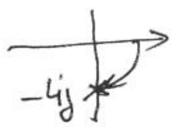
a.) $\ln z = \ln|z| + j \operatorname{arc} z \qquad \operatorname{arc} z \in [-\pi, \pi)$

$\boxed{4}$ $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi) \qquad$ — " —

b.) $z_1 = e^1 (\cos(-3) + j \sin(-3)) \qquad \operatorname{Re} z_1 = e\cos 3$

$\boxed{10}$ $\qquad \operatorname{Im} z_1 = -e\sin 3 \qquad$ 2

$z_2 = \ln|-4j| + j(\operatorname{arc}(-4j)) = \ln 4 + j\left(-\frac{\pi}{2}\right)$



$\operatorname{Re} z_2 = \ln 4, \quad \operatorname{Im} z_2 = -\frac{\pi}{2} \qquad$ 3

$z_3 = \ln 4 + j\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$\operatorname{Re} z_3 = \ln 4, \quad \operatorname{Im} z_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad$ 1

$z_4 = (-4j)^{2j} = e^{2j \ln(-4j)} = e^{2j\left(\ln 4 + j\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} =$

$= e^{\pi + j 2\ln 4} = e^{\pi}(\cos(2\ln 4) + j \sin(2\ln 4))$

$\operatorname{Re} z_4 = e^{\pi} \cos(2\ln 4) \; \left(= e^{\pi} \cos \ln 16\right) \qquad$ 3

$\operatorname{Im} z_4 = e^{\pi} \sin(2\ln 4)$

$z_5 = \ln 0$: nem értelmezett $\qquad$ 1

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

an2v11060915.

9. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3}{x}\, y = -2$$

$H:\ y' - \frac{3}{x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3}{x}\, dx$

$\Rightarrow \ln y = 3 \ln x \Rightarrow = y = x^3 = \varphi(x)$ egy megoldás

$y_H = C \cdot \varphi(x) = C x^3 \quad C \in \mathbb{R}$

4

$y_{ip} = c(x) \cdot x^3$

$y'_{ip} = c' x^3 + c\, 3x^2$

$c' x^3 + c\, 3x^2 - \frac{3}{x} c x^3 = -2 \Rightarrow c' = -2x^{-3} \Rightarrow c = x^{-2}$

$y_{ip} = x^{-2} \cdot x^3 = x$

5

$y_{id} = y_H + y_{ip} = Cx^3 + x$ 1

10. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 2$ ponthoz tartozó Taylor sorait és adja meg azok konvergencia tartományát!

$$f(x) = e^{x+7}, \qquad g(x) = \frac{1}{x+8}$$

$f(x) = e^{(x-2)+9} = e^9 e^{x-2} = e^9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \Big|_{u=x-2} =$

$= e^9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-2)^n \qquad K.T.:\ (-\infty, \infty)$

$g(x) = \frac{1}{(x-2)+10} = \frac{1}{10} \frac{1}{1 + \frac{x-2}{10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{-(x-2)}{10}} =$

$= \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(x-2)}{10} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^{n+1}} (x-2)^n$

$\left| -\frac{x-2}{10} \right| = \frac{|x-2|}{10} < 1 \Rightarrow |x-2| < 10$

$KT: (-8, 12)$

an2v-110609/6.