

1. feladat (12 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \sqrt{4 + y^2} \cdot x \cdot e^{2x}$$

2. feladat (9+6=15 pont)

a) Írja fel a homogén, illetve az inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet általános alakját!

Melyiknek a megoldásai alkotnak lineáris teret? Állítását bizonyítsa be!

b) Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

3. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények $x_0 = 2$ bázisponthoz tartozó Taylor-sorát, valamint a sorok konvergenciasugarát!

a) $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$,

b) $g(x) = \frac{1}{(2x + 3)^2}$.

A $g(x)$ függvény Taylor-sorának felírásához használja fel $f(x)$ Taylor-sorát!

4. feladat (4+7+6=17 pont)

a) Mit értünk azon, hogy az $f(\underline{x})$ többváltozós függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? (Ismertesse a definíciót!)

b) Mi a kapcsolat többváltozós függvények totális deriválhatósága és folytonossága között? A tanult tételt mondja ki és bizonyítsa be!

c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Totálisan deriválható-e a fenti $f(x, y)$ függvény az origóban?

* **5. feladat (7+8=15 pont)**

a) Ismertesse a síkbeli polárkoordinátákat egy ábrán, és számolja ki a síkbeli polártranszformáció Jacobi-determinánsát!

b) Határozza meg a következő kettős integrál értékét!

$$\iint_T xy^2 \, dT = ? \quad T : x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \geq 0, \quad y \geq x$$

* **6. feladat (4+8=12 pont)**

a) Ismertesse az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény ($z = x + iy$) deriválhatóságáról tanult szükséges és elégséges feltételt! Adja meg $f'(z)$ -t u és v segítségével!

b) Hol deriválható, hol reguláris az $f(z) = z \cdot |z|^2$ függvény?

* **7. feladat (6+3+6=15 pont)**

Határozza meg a következő komplex vonalintegrálok értékét algebrai alakban!

Az L görbe a $(-2+i)$ -től $(1+i)$ -ig haladó egyenes szakasz, a zárt görbéket egyszer járjuk körbe pozitív irányban.

$$a) \int_L \bar{z} \, dz = ? \quad b) \oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z+2-i} \, dz = ? \quad c) \oint_{|z|=5} \frac{\sin(z)}{z+2-i} \, dz = ?$$

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni.
