BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Vetier András

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Műegyetemi Kiadó, 2008

A jegyzet szerzőjét a BME rektora 1985. évben - a jegyzet írásáért - nívódíjban részesítette:

Szerző:

Vetier András

(Kilencedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **051360**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 20,7 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 6810/08

TARTALOM

ELŐSZÓ

Ennek a jegyzetnek az a célja, hogy a matematika nehezebb fejezeteiben, technikai trükkjeiben kevésbé járatos olvasó is megismerkedhessen a valószinüségszámitás legfontosabb fogalmaival, tételeivel; láthassa az elmélet felépitését és alkalmazási lehetőségeit. Ezért tárgyalásunkban egyes helyeken átugorjuk a szigoru matematikai módszereket. Támaszkodunk a szemléletre, és egy-egy nehezebb bizonyitást heurisztikus magyarázattal helyettesitünk. Ilyenkor a bizonyitást vázlatos bizonyitásnak nevezzük. Ha pedig egy bizonyitásnak csak valamelyik lépését nem indokoljuk egzakt matematikai eszközökkel, akkor erre ott utalunk. Amikor egy közelitő egyenlőséget anélkül alkalmazunk, hogy a közelités pontosságát megvizsgálnánk, a $\approx$ jelet használjuk.

A B.M.E. Villamosmérnöki Karán a nappali és a levelező tagozaton is tanulnak valószinüségszámitást. Általában egy félév jut a valószinüségszámitásra, de a B oktatási formában ezt még követi matematikai statisztika vagy/és sztochasztikus folyamatok elmélete. Van olyan szak, ahol az első évben, más szakon csak a negyedik évben szerepel a valószinüségszámitás. Ezért nem volt könnyü egységes kari jegyzetet késziteni, amiből mindenki "megkapja a magáét". Néhány részre a későbbi fejezetek lényegében nem támaszkodnak, és igy szükség esetén ezek a részek kihagyhatók. Ilyenek: I/11; II/3,4,5; IV/6; VI/6; VII/1,2,3; X/6; XII; XIII/1,3,4; XIV. Ezeken kivül néhány nehezebb részt ugy szerkesztettem, hogy a kevésbé érdeklődő olvasó ezeket átugorhassa. Ezeket a lap szélén huzott szaggatott vonallal jelöltem meg. Néhány fontos gondolatot a lap szélén huzott kettős vonallal emeltem ki, nehogy elkerülje az Olvasó figyelmét. A definiált fogalmakat mindig aláhuztam. A "Definició" kulcsszót sehova sem irtam ki, hogy a szöveg folyamatosságát ne kelljen ezzel megtörni.

A jegyzet terminológiáját és jelölésrendszerét igyekeztem összhangban tartani Prékopa András Valószinüségelmélet c. könyvével (Müszaki Könyvkiadó, 1972). Ezt a könyvet ajánlom azoknak, akik további ismeretekre szeretnének szert tenni.

A jegyzetben bizonyitás nélkül vagy csak vázlatos bizonyitással tárgyalt, mélyebb eredmények egzakt bizonyitása megtalálható J. Neveu Bases mathématiques du calcul des probabilités (Masson et Cie, Paris, 1964) és V.V. Petrov Szummü nyezaviszimüh szlucsajnüh velicsin (Nauka, Moszkva, 1972) c. könyveiben.

I. VALÓSZÍNŰSÉG

1. „Rend a rendetlenségben"

Ha feldobunk egy dobókockát, biztosak lehetünk benne, hogy nem kerül Föld körüli pályára, hanem valahova leesik. Ha sík terepre esik, akkor az is biztos, hogy valamelyik lapja lesz felül, hiszen nem tud sem a sarkán, sem az élén megállni. Azt viszont nem lehet előre megmondani, hogy melyik lapja lesz felül. Ez véletlentől függ.

Ha egy jó műszaki állapotban lévő Mercedes kellő mennyiségű üzemanyaggal az M7-es autópályán Budapestről Székesfehérvárra igyekszik, akkor (feltéve, hogy semmiféle forgalmi dugó sem akadályozza abban, hogy a megengedett maximális sebességgel menjen) 0,66 óra = = 39,6 perc alatt Székesfehérvárra ér. Ugyanis a két város közti távolság 66 km, az autópályán a megengedett maximális sebesség 100 km/ó és tudjuk, hogy egyenletes sebesség esetén idő = ut/sebesség. Viszont akármennyire is szabad az ut a Mercedes előtt, nyilvánvaló, hogy sebessége nem egyenletes. Kis emelkedők, lejtők, szembeszél, hátszél, kanyarok, zavaró látási viszonyok stb. miatt hol lassabban, hol gyorsabban megy mint 100 km/ó. A sofőr nem képes ugy nyomni a gázpedált, hogy a kocsi pontosan 100 km/ó sebességgel menjen. Ezért a kocsi menetideje sem pontosan 39,6 perc. Ennél picivel több vagy kevesebb. Ha (lenne Mercedesem, és) többször leutaznék Budapestről Székesfehérvárra a mondott körülmények között, mindig más lenne a menetidő. Körülbelül 39,6 perc, de nem pontosan ennyi. A menetidőt nem lehet előre pontosan megmondani. Ezt is véletlen tényezők befolyásolják.

A való világ jelenségei (pl. kockadobás; közlekedés) olyanok, hogy bizonyos feltételek mellett (a kocka sík terepre esik; autónkat semmi sem akadályozza abban, hogy maximális sebességgel menjen) egyes események (a kocka valahova leesik; autónk odaér Székesfehérvárra) biztos bekövetkeznek, más események (pl. a kocka ugy esik le, hogy a 6-os szám lesz felül; autónk menetiedje nem több 39,6 perc-nél) véletlentől függően vagy bekövetkeznek vagy nem.

A véletlenszerűség bizonyosfajta rendetlenséget jelent: nem lehet előre tudni, hogy a kocka melyik oldala lesz felül. De nyilván mindenki tapasztalta már, hogy szabályos dobókocka esetén ritkábban lesz a dobás eredménye 6-os, mint nem 6-os. Sőt, ennél többet is állíthatunk: ha sokszor dobjuk fel a kockát, akkor a dobás eredménye az eseteknek körülbelül $\frac{1}{6}$ részében lesz 6-os, és $\frac{5}{6}$ részében nem 6-os. Ez bizonyosfajta rendet, törvényszerüséget jelent a rendetlenségben. Ha az ehhez hasonló törvényszerüségeket felismerjük, hasznunk származhat belőle. Egyrészt alaposabban megismerjük a jelenségeket (a "véletlentől függően bekövetkezik vagy nem következik be" megállapitásnál sokkal alaposabb ismerettel rendelkezünk, ha tudjuk, hogy "az eseteknek körülbelül $\frac{1}{6}$ részében bekövetkezik, és $\frac{5}{6}$ részében nem következik be"), másrészt a törvényszerüségek ésszerü kihasználásával "anyagi" hasznunk is keletkezhet. Például jó üzlet lenne számomra az alábbi hazárd játék: feldobunk egy szabályos dobókockát, ha 6-osra esik, akkor nyerek 6 Ft-ot, ha nem 6-osra esik, akkor vesztek 1 Ft-ot. Ugyanis például 120 fogadás után nyereményem körülbelül

$$\frac{1}{6} \cdot 120 \cdot 6 - \frac{5}{6} \cdot 120 \cdot 1 = 20 \text{ Ft}$$

lenne.

Ha egy jelenségről céljainknak megfelelő modellt lehet késziteni a jelenségben felbukkanó véletlen tényezők figyelembe vétele nélkül, akkor számunkra ez is megfelelő. Például a vonatok - különösen télen - eléggé véletlenszerüen közlekednek, a vasuti menetrendeket mégis ennek figyelembe vétele nélkül készitik. Más esetekben (pl. időjárás előrejelzésekben) nagyon is figyelembe kell venni a véletlen tényezőket. A valószinüségszámitás elmélete - felhasználva a véletlenszerüségben rejlő törvényszerüségeket - éppen arra ad utmutatást, hogy mit kell tennünk, ha egy jelenségről a véletlen tényezők figyelembevételével akarunk modellt késziteni.

A való világban nehéz olyan jelenséget találni, melybe a véletlen ne szólna bele. Ezért a valószinüségszámitás alkalmazási területe szinte "nem ismer határokat". A valószinüségszámitás szemléletmódja, fogalmai manapság olyannyira fontosak, hogy az általános iskola alsó tagozatában is tanitják. Kezdjünk hozzá gyorsan mi is!

2. Véletlen jelenség

Egy olyan jelenséget, melynek kimenetelét nem lehet pontosan tudni a jelenség lezajlása előtt, véletlen jelenségnek fogunk nevezni. Például:

1. A kockadobásnál nem tudjuk, hogy hol és melyik oldalára fog leesni a kocka.

2. Délelőtt nem lehet megmondani, hogy az M7-es autópálya forgalma pontosan hogyan fog alakulni az esti órákban.

3. Az időjárás is véletlen jelenség.

Véletlen jelenségeket azáltal adhatunk meg, hogy leirjuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a jelenség lezajlik. Például:

1. Megmondjuk, hogy szabályos kockát dobunk fel. Előirjuk, hogy jó magasra kell a kockát feldobni. Garantáljuk, hogy a kocka sik terepre essen.

2. Megszabjuk, hogy mikor (munkanapon vagy hétvégén, télen vagy nyáron, milyen napszakban stb.) vizsgáljuk az autópálya forgalmát.

3. Megmondjuk, hogy hol (Budapesten, a Hawaii-szigeteken), mikor (tavasszal, ősszel) stb. vizsgáljuk az időjárást.

Egy véletlen jelenség megadásánál az összes szóbajöhető feltétel részletes leirása gyakorlati és elvi akadályokba ütközik. A részletes leirás több oldalt tenne ki, illetve akárhány feltétel megadása után fel lehet tenni olyan kérdést, melyet a megadott feltételekből nem lehet megválaszolni. Ezt a nehézséget azzal próbáljuk áthidalni, hogy csak a felvetett probléma szempontjából lényeges feltételeket irjuk le, továbbá a feladatok szövegét ugy fogalmazzuk meg, hogy az Olvasó remélhetőleg magától kitalálja a nem részletezett feltételeket is. Ennek eredményeképpen a valószinüségszámitás feladatok szövege általában csak közepesen hosszu. Helyes megértésük viszont az Olvasó aktiv fantáziáját igényli.

3. Esemény

Véletlen jelenségekkel kapcsolatban megfogalmazhatunk olyan állitásokat, melyek vagy bekövetkeznek a jelenség lezajlása során, vagy nem. Például:

1. A kockadobásnál a kocka vagy ugy esik le, hogy a 6-os lesz felül, vagy nem.

2. Az M7-es autópályán télen, egy kiszemelt munkanapon, este 18 és 20 óra között vagy lesz karambol, vagy nem.

Minden olyan kijelentést, állitást, ami a vizsgált véletlen jelenség lezajlása során vagy bekövetkezik, vagy nem következik be, eseménynek nevezünk. Az eseményeket azáltal adjuk meg, hogy megmondjuk, mikor következik be az esemény. Események jelölésére legtöbbnyire nagy betüket használunk. Például események:

1. A = a kockadobás eredménye 6-os. (olvasd: "A legyen az az esemény, hogy a kockadobás eredménye 6-os")

2. B = az M7-es autópályán télen, munkanapon, este 18 és 20 óra között karambol történik.

3. C = holnap Budapesten esni fog az eső.

Nem szabad elfelejteni, hogy az eseményeket mindig valamilyen korábban elmagyarázott vagy nyilvánvalósága miatt el sem magyarázott véletlen jelenséggel kapcsolatban kell értelmeznünk.

Két eseményt akkor tekintünk egyenlőnek, ha pontosan egyszerre következnek be. Ha egy dobókockával dobunk, akkor a "6-tal osztható számot dobunk" esemény ugyanaz, mint az "5-nél nagyobb számot dobunk" esemény, hiszen ezek pontosan egyszerre következnek be: a kockán az egyetlen 6-tal osztható szám és az egyetlen 5-nél nagyobb szám a 6-os.

Az események közé soroljuk és biztos eseménynek nevezzük azt, ami biztosan bekövetkezik, és lehetetlen eseménynek azt, ami semmiképpen sem következhet be. Például a kockadobással kapcsolatban biztos esemény: "a kocka valahova leesik", lehetetlen esemény: "10-est dobunk". A biztos esemény jele legyen Ω, a lehetetlen eseményé $\emptyset$.

4. Relatív gyakoriság, valószínűség

Ha egy véletlen jelenség lezajlik (pl. feldobjuk a kockát, és az leesik; az M7-es autópálya forgalmát a bennünket érdeklő szempontok alapján egyik este megfigyeljük), akkor azt mondjuk, hogy egy kisérletet hajtottunk végre. Ha a kisérletet többször végezzük el, mondjuk n-szer (pl. a kockát n-szer feldobjuk, vagy n darab kockát dobunk fel egyszerre, n napon át vizsgáljuk az autópálya forgalmát), akkor azt mondjuk, hogy n hosszuságu kisérletsorozatot hajtottunk végre. Vigyázat, nehogy félreértés essék! Ha a véletlen jelenség 10 darab kocka feldobásából áll, akkor egy 45 hosszuságu kisérletsorozat egy 10 kockából álló kockakészlet 45-szöri vagy 450 darab 10-es csoportokba osztott kocka egyszeri feldobását jelenti.

Tekintsünk most egy véletlen jelenséget és vele kapcsolatban egy A eseményt. Végezzünk a véletlen jelenséggel kapcsolatban n darab kisérletet. Ezen kisérletsorozat során az A esemény valahányszor bekövetkezik. Ezt a számot jelöljük n_A-val. Az $\frac{n_A}{n}$ hányadost - mely azt mutatja, hogy a kisérletek hányad részében következett be az A esemény - az esemény relativ gyakoriságának nevezzük. n_A véletlentől függ, így a relativ gyakoriság is véletlentől függ.

A való világ véletlen jelenségei olyanok, hogy a legtöbb A eseményhez hozzá lehet rendelni egy véletlentől nem függő, csupán az A eseménytől függő $P(A)$-val jelölt számértéket, melyre igazak a következők:

1. Ha a szóban forgó véletlen jelenségre "nagyon hosszu" kisérletsorozatot végzünk, akkor az eseteknek körülbelül $P(A)$-nyi részében következik be az A esemény. Tehát hosszu kisérletsorozat esetén az $\frac{n_A}{n}$ relativ gyakoriság "közel lesz" $P(A)$-hoz.

2. Ha valamilyen célból el akarunk érni egy bizonyos pontosságot, akkor "sok" "elég hosszu" kisérletsorozat elvégzése esetén csak "viszonylag kevés" kisérletsorozatban fog a relativ gyakoriság ettől a $P(A)$ számtól a megadott pontosságnál jobban eltérni. Ha például A a 6-os dobásának eseménye, és a kocka teljesen szimmetrikus, és sok ember mindegyike elég sokszor feldobja a kockát, akkor az emberek számához viszonyitva csak kevés embernél lesz a relativ gyakoriság $(\frac{1}{6} - 0,01)$-nál kisebb vagy $(\frac{1}{6} + 0,01)$-nál nagyobb.

Ezt a $P(A)$ számot az A esemény <u>valószinüségének</u> nevezzük. (Valószinüség latinul: probabilitas. Innen jön a P betü.) A P betü mögé a zárójelbe magát az eseményt definiáló mondatot is irhatjuk, például $P(\text{hatost dobunk}) = \frac{1}{6}$.

A fentiekben használt "nagyon hosszu", "közel lesz", "sok", "elég hosszu", "viszonylag kevés" szavak nem preciz matematikai kifejezések. Felépitendő matematikai modellünktől elvárjuk, hogy a relativ gyakoriság fentebb elmondott "stabilitási tulajdonságát" pontos matematikai formába öntse. Mint a XIV. fejezet 2. pontjában látni fogjuk, eme kivánalmunknak modellünk eleget fog tenni.

Felmerül a kérdés, hogy egy eseményhez igy hozzárendelt valószinüség mennyire meghatározott, mennyire objektiv, milyen értelemben létező érték. Ezt a következő analógiával világitjuk meg. Ha például dobókockánk tömegét szeretnénk megállapitani, akkor ezt megtehetjük grammnyi, tizedgrammnyi vagy akár milligrammnyi pontossággal. De ha 25 tizedesjegy pontossággal szeretnénk megadni a tömeget grammokban, akkor egy atomtömegnél is pontosabban kellene mérnünk. Ez pedig lehetetlenség. A matematikai modellben a dobókocka dekagramokban kifejezett tömegét persze jellemezhetjük egy valós számmal, és ez a szám lehet - mondjuk - éppen $\frac{1}{6}$. Az eredeti, valós kockára vonatkozóan ez azt az információt nyujtja nekünk, hogy a dobókocka tömege például 0,166 és 0,167 dekagramm között van. Most nézzük, mi a helyzet a 6-os dobásának valószinüségével. Ha a dobókockát egy tökéletes mértani idommal modellezzük, akkor szimmetria okok miatt azt mondjuk, hogy a 6-os dobásának valószinüsége $\frac{1}{6}$. Egy elegendően szabályos dobókocka esetén ez a valószinüség tényleg 0,166 és 0,167 közé esik. De ennek a valószinüségnek a meghatározása 25 tizedesjegy pontossággal értelmetlen, mert ha csak egy porszem tapad a kocka egyik oldalára, már attól is módosul a 6-os lapra esés valószinüsége. Valódi kocka esetén az egyes valószinüségeket kisérletileg - azaz méréssel - határozhatjuk meg. Érdekes kérdés, hogy vajon hány kisérletet kell végeznünk, hogy a relativ gyakoriság a valószinüséget előre adott pontossággal megközelitse. Ezekkel az izgalmas dolgokkal majd a XIV. fejezet 3. pontjában foglalkozunk.

Az események valószinüségének meghatározása a matematikai modellben logikai okoskodásokkal (pl. a kocka szimmetriája alapján a 6-os dobásának valószinüsége $\frac{1}{6}$), könnyebb-nehezebb matematikai módszerekkel (lásd a jegyzet hátralévő részét) lehetséges. A logikai okoskodásokkal nyert eredmények is - ne feledjük! - végsősoron a tapasztalatra épülnek, mert például egy valóságos kocka szimmetrikus mivoltát nem lehet elméleti uton bebizonyitani csak (többé-kevésbé) tapasztalni.

Természetesen egy esemény valószinüségéről csak meghatározott feltételek teljesülése esetén lehet beszélni. Ha a feltételek megváltoznak, az esemény valószinüsége is megváltozhat. Ha például a kockát nem dobjuk fel elég magasra, hanem óvatosan kigördítjük kezünkből (kisgyerekek próbálnak igy 6-ost dobni, amikor nagyon szeretnének győzni a "Ki nevet a végén" játékban), akkor jelentősen növelhetjük a 6-os dobásának esélyét. A mi terminológiánkkal élve ezt azzal a fordulattal fejezhetjük ki, hogy csak adott körülményekkel rendelkező véletlen jelenségre vonatkoztatva beszélhetünk egy esemény valószinüségéről. Ha a véletlen jelenség feltételei megváltoznak, akkor az események valószinüsége megváltozhat.

Ha a véletlen jelenség körülményeit nem ismerjük, semmi tapasztalatunk nincs, akkor a jelenséggel kapcsolatos események valószinüségéről nem beszélhetünk. Aki soha nem foglalkozott focival, semmit nem érez a hétvégi totó-meccsek esélyeiről, mig a foci berkeiben járatosabb egyének esetleg joggal érezhetik, hogy melyik csapat győzelme a valószinübb, sőt esetleg számszerü valószinüség-értéket is tulajdonithatnak kedvenc csapatuk győzelmének: "Ilyen formaidőzités, csapatösszeállitás, időjárási viszonyok stb. mellett az eseteknek körülbelül 70%-ában szokta megverni az én csapatom a tiédet, tehát holnapi győzelmünk valószinüsége 0,7".

Matematikai modellünk felépitését mindenekelőtt a valószinüség alapvető tulajdonságainak felkutatásával, a valószinüség axiómáinak kimondásával kell kezdenünk. Ehhez először az események közötti müveletekkel és relációkkal kell megismerkednünk.

5. Műveletek és relációk események között

Ugyanazzal a véletlen jelenséggel kapcsolatban értelmezett események között összefüggéseket fedezhetünk fel. Például a kockadobással kapcsolatban értelmezzük a következő eseményeket:

A = páros számot dobunk, (2, 4, 6),
B = páratlan számot dobunk (1, 3, 5),
C = 3-nál nagyobb számot dobunk, (4, 5, 6),
D = 3-mal osztható számot dobunk, (3, 6),
E = 2-nél nagyobb számot dobunk, (3, 4, 5, 6),
F = 4-et vagy 6-ot dobunk, (4, 6),
G = 2-t dobunk, (2).

Vegyük észre, hogy

1. A pontosan akkor következik be, amikor B nem következik be. Ezt azzal a szóhasználattal fejezzük ki, hogy az A és B események egymás komplementumai. Jelölésben: $\overline{A} = B$, $\overline{B} = A$.

2. E pontosan akkor következik be, amikor C és D közül legalább az egyik bekövetkezik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy E a C és D események összege. Jelölésben: $E = C + D$.

3. F pontosan akkor következik be, amikor A is és C is bekövetkezik. Ennek a ténynek a kifejezésére azt mondjuk, hogy F az A és C események szorzata. Jelölésben: $F = A \cdot C$.

4. G pontosan akkor következik be, amikor A bekövetkezik, de C nem következik be. Ilyenkor G-t az A és C események különbségének nevezzük. Jelölésben: $G = A - C$. Vegyük észre, hogy $A - C = A \cdot \overline{C}$.

5. B és F egyidejűleg nem következhet be, az ő szorzatuk a lehetetlen esemény. Ilyenkor a B és F eseményeket egymást kizáró eseményeknek mondjuk. Erre külön jelölést nem vezetünk be. Ha kell, ennyit írunk: $B \cdot F = \phi$.

6. Ha F bekövetkezik, akkor A is bekövetkezik. Ennek kifejezésére szolgál: F maga után vonja A-t. Jelölésben $F \subset A$. Vegyük észre, hogy F akkor és csak akkor vonja maga után A-t, ha $F \cdot A = F$.

A fentiekben négy műveletet (komplementum-képzés, összeadás, szorzás, kivonás) és két relációt ("egymást kizárják", "maga után vonja") értelmeztünk egy konkrét példán keresztül.

Nem okoz problémát az összeg és a szorzat értelmezése kettőnél több eseményre sem. $A = A_1 + A_2 + \ldots$ vagy $A = \sum_i A_i$ (olvasd:

szumma A_i), illetve $B = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots$ vagy $B = \prod_i B_i$ (olvad: produktum B_i) azt jelenti, hogy A pontosan akkor következik be, ha az $A_1, A_2, \ldots$ események közül legalább az egyik bekövetkezik, illetve, hogy B pontosan akkor következik be, mikor a $B_1, B_2, \ldots$ események mindegyike bekövetkezik.

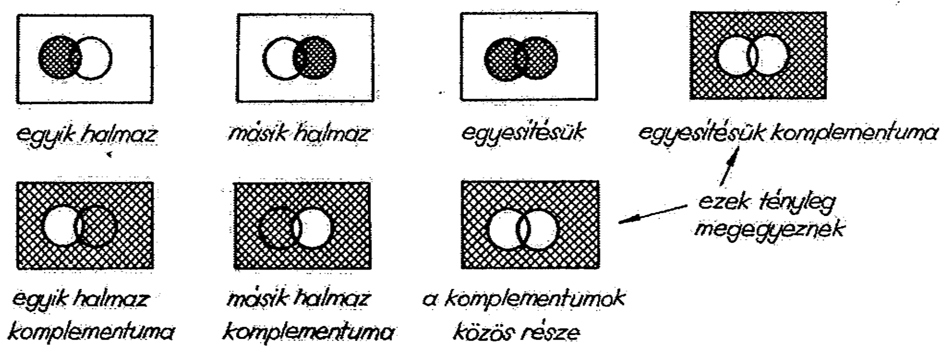
A $C_1, C_2, \ldots$ eseményeket pedig akkor nevezzük egymást kizáróaknak, ha közülük legfeljebb egy következhet be. Tehát akárhogy is veszünk közülük kettőt, ezek együttes bekövetkezése lehetetlen: $i \neq j$ esetén $C_i \cdot C_j = \phi$

6. Események szemléltetése

Könnyű meggyőződni róla, hogy az események rendszere a fenti műveletekkel és relációkkal felruházva ugyanolyan azonosságoknak tesz eleget, mint egy alapul választott halmaz részhalmazainak rendszere a szokásos halmazműveletekkel és relációkkal felruházva. Ehhez az eseményekkel kapcsolatos fogalmakat a következő szótár segítségével kell megfeleltetni a halmazokkal kapcsolatos fogalmaknak:

biztos esemény	alaphalmaz
lehetetlen esemény	üres halmaz
valamilyen esemény	az alaphalmaz részhalmaza
esemény komplementuma	kiegészítő (komplementer) halmaz
események összege	halmazok egyesitése (uniója)
események szorzata	halmazok közös része (metszete)
események különbsége	halmazok különbsége
egymást kizáró események	közös elem nélküli (diszjunkt) halmazok
A maga után vonja B-t	A részhalmaza B-nek

Például halmazokra igaz, hogy két halmaz egyesitésének komplementuma megegyezik a halmazok komplementumainak közös részével:



1. ábra

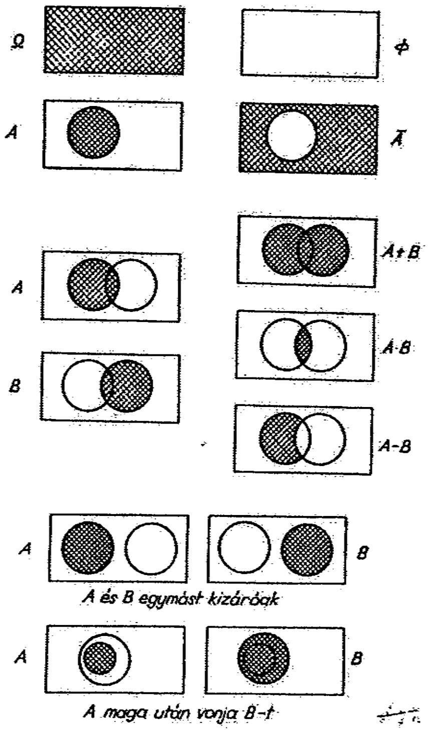
Példaként ennek az azonosságnak a megfelelőjét levezetjük eseményekre:

__De Morgan-azonosság:__ __Tetszőleges__ A __és__ B __eseményekre__ $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

__Levezetés:__ $A + B$ akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. Ezért $\overline{A + B}$ akkor következik be, ha sem A, sem B nem következik be. Ez pedig annyit jelent, hogy $\overline{A}$ is és $\overline{B}$ is bekövetkezik, vagyis $\overline{A} \cdot \overline{B}$ bekövetkezik. Ezzel beláttuk, hogy $\overline{A + B}$ és $\overline{A} \cdot \overline{B}$ pontosan egyszerre következnek be. Az események egyenlőségére mondott definiciónk szerint ez azt jelenti, hogy $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$. ■

A többi azonosságot ki sem mondjuk, mert a Kedves Olvasó bizonyára találkozott már velük a halmazelméletben vagy a Boole-algebrák (ejtsd: búl) elméletében, és a fentiekhez hasonló gondolatmenetekkel egyszerűen kiadódnak eseményekre is.

Mindezek alapján az eseményeket szemléltethetjük ugyanugy, ahogy halmazokat szoktunk szemléltetni. Az alábbi ábrák remélhetőleg magyarázat nélkül is érhetőek:



2. ábra

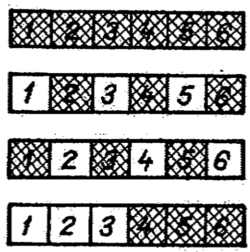
Ha például a kockadobás véletlen jelenségét vizsgáljuk, és csak olyan események érdekelnek bennünket, melyek azzal kapcsolatosak, hogy hányast dobunk (olyan események, melyek például azzal kapcsolatosak, hogy a kocka hová esik, nem érdekelnek minket), akkor az események halmazokkal való szemléltetésének céljára alaphalmazként választhatjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemekből álló halmazt. Az előző pontban értelmezett A, B, C.... eseményeknek megfelelő halmazok pedig éppen azokból a számokból állhatnak, melyeket ezen események értelmezésénél zárójelben megadtunk:

Ω = biztos esemény

A = páros számot dobunk

B = páratlan számot dobunk

C = 3-nál nagyobb számot dobunk



3. ábra

Hasznos a Kedves Olvasó számára, ha az eseményeket - ahol csak lehet - halmazoknak felelteti meg. Ugyanis az eseményeket sokszor csak hosszasan megfogalmazott mondatokkal írhatjuk le, míg a halmazokat rajzzal szemléltethetjük. Az események közötti műveletek azonosságait is gyorsabban lehet felidézni rajz segítségével.

Megjegyzés: Mindez azt az ötletet adja, hogy az események közötti műveleteknek ne az aritmetikából vegyünk nevet, hanem a halmazelméletből: összeg helyett unióról, szorzat helyett metszetről stb. beszéljünk, s jelölésünkben is a halmazelméleti jelölésekhez igazodjunk: $A + B$ helyett $A \cup B$-t, $A \cdot B$ helyett $A \cap B$-t stb. írjunk. Így ugyanis az események közötti műveletek tulajdonságai könnyebben megjegyezhetőbbé válnának. Nem állna fenn annak a veszélye, hogy valaki $A + A$ láttán $2A$-ra asszociálna, holott $A + A = A$. (Halmazoknál is $A \cup A = A$.) Mindennek semmi akadálya nem lenne, de mi inkább igazodunk Prékopa András Valószínűségelmélet c. könyvének terminológiájához és jelöléseihez.

7. A valószínűség axiómái

Mint korábban leszögeztük, egy A esemény $P(A)$ valószínűsége azt fejezi ki, hogy hosszu kisérletsorozat esetén az eseteknek körülbelül $P(A)$-nyi részében következik be az A esemény. Tehát ha n nagy, akkor az $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság közel van a $P(A)$ valószínűséghez.

Mivel bármely esemény relatív gyakorisága nagyobb vagy egyenlő mint 0, és kisebb vagy egyenlő mint 1, nem kell különösebben érvelni amellett, hogy elfogadjuk:

1. axióma: Bármely A esemény valószínűsége nagyobb vagy egyenlő mint 0, és kisebb vagy egyenlő mint 1:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

A biztos esemény n kisérlet során n-szer következik be, a lehetetlen esemény pedig egyszer se. Tehát a biztos esemény relatív gyakorisága mindig 1, a lehetetlen eseményé pedig 0. Ezért a következő axiómánk is kézenfekvő.

2. axióma: A biztos esemény valószínűsége 1, a lehetetlen esemény valószínűsége 0:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\phi) = 0.$$

3. axiómánk megvilágitása céljából tekintsük a következő véletlen jelenséget: kitöltünk egy lottószelvényt, és pénteken délelőtt izgalommal figyeljük a rádiót, hogy mik a nyerő számok. Értelmezzük az alábbi eseményeket:

A = szelvényünkkel a pénteki huzáson nyerünk (legalább két találatunk van),

A_5 = szelvényünk 5 találatos,

A_4 = " 4 " ,

A_3 = " 3 " ,

A_2 = " 2 " .

Az A_2, A_3, A_4, A_5 események egymást kizáróak: $A_iA_j = \phi$, ha $i \neq j$. Az A esemény pontosan akkor következik be, ha az A_2, A_3, A_4, A_5 események közül valamelyik bekövetkezik. Ezért az A esemény az A_2, A_3, A_4, A_5 események összege: $A = \sum_{i=2}^{5} A_i$. Végezzünk n kisérletet, azaz n héten át egy-egy szelvénnyel játsszunk a lottón. Az n hét eltelte után számoljuk meg hányszor volt 5-ösünk, 4-esünk, 3-asunk, illetve 2-esünk. Ezen négy darab szám összege megadja, hogy összesen hányszor nyertünk. Korábbi jelöléseinket értelemszerűen használva ezt igy irhatjuk fel: $n_A = \sum_{i=2}^{5} n_{A_i}$. Általánosságban is igaz, hogy ha egy A esemény véges vagy végtelen sok egymást kizáró A_i esemény összege, azaz $A = \sum_i A_i$, és $i \neq j$ esetén $A_i \cdot A_j = \phi$, akkor n kisérletet végezve az A esemény bekövetkezéseinek számát megkapjuk, ha az A_i események bekövetkezéseinek számát összeadjuk: $n_A = \sum_i n_{A_i}$.

Ebből a relativ gyakoriságokra is hasonló összefüggés adódik:

$\frac{n_A}{n} = \sum_i \frac{n_{A_i}}{n}$. Ezért axiómaként elfogadjuk:

3. axióma: (a valószinüség összegzési tulajdonsága). Ha az A esemény véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok egymást kizáró A_i esemény összege, akkor az A esemény valószinüsége az A_i események valószinüségeinek összegével egyenlő. Képletekkel megfogalmazva:

$$\text{Ha} \quad A = \sum_{i=1}^{k} A_i, \quad \text{és} \quad i \neq j \quad \text{esetén} \quad A_i \cdot A_j = \phi, \text{akkor}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \qquad (k \leq \infty).$$

Látni fogjuk, hogy ezekből az axiómákból kiindulva olyan elméletet lehet felépíteni, ami igen sok gyakorlati probléma megoldására alkalmas. Végülis ez igazolja, hogy axiómáinkat helyesen vettük fel.

3. axiómánkkal kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha csak véges sok tagra vagy pedig megszámlálhatóan végtelennél több tagra is megkövetelnénk az összegzési tulajdonság teljesülését, akkor csak sokkal szegényebb elméletet tudnánk felépíteni. A figyelmes Olvasó bizonyára észre fogja venni a későbbiekben, hogy az elmélet felépítésénél hol nem lenne elegendő a véges sok tagra kimondott összegzési tulajdonság, illetve hol vezetne ellentmondásra a megszámlálhatóan végtelennél több tagra kimondott összegzési tulajdonság.

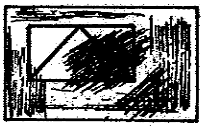
8. A valószínűség szemléltetése

Ha az eseményeket valamilyen alaphalmaz részhalmazaival szemléltetjük, akkor a valószínűséget is szemléltethetjük a következőképpen: az alaphalmazt festékkel kenjük be oly módon, hogy minden részhalmazra annyi festék (mondjuk annyi gramm) jusson, amennyi a részhalmaznak megfelelő esemény valószínűsége.

Ω

4. ábra

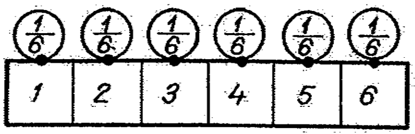
Ezt a szemléltetést az teszi lehetővé, hogy az alaphalmaz festékkel való bekenése rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha az alaphalmaz valamelyik részhalmazát véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok közös elem nélküli halmaz egyesítéseként állítjuk elő, akkor a tekintett részhalmazon levő festékmennyiség az egyesítésben szereplő halmazokon lévő festékmennyiségek összegével egyenlő. Ez a tulajdonság a valószínűség összegzési tulajdonságának felel meg.



5. ábra
A kis téglalapon annyi gramm festék van, mint a háromszögeken együttvéve

Mivel a biztos esemény valószínűsége 1, a biztos eseménynek megfelelő alaphalmazon egységnyi festékmennyiségnek kell lenni. Tehát mindig egységnyi festékmennyiséget kell szétkenni az alaphalmazon.

Ha például a kockadobás véletlen jelensége esetén az 1, 2, 3, 4, 5, 6, elemekből álló halmazt választjuk alaphalmaznak, és a kocka szimmetriája alapján feltételezzük, hogy a kocka minden oldala $\frac{1}{6}$ valószinüséggel kerülhet felülre, akkor a festéket ugy kell elosztani ezen hat elem között, hogy mindegyikre $\frac{1}{6}$ -nyi festékmennyiségből egy "festékcsomót" helyezünk:



6. ábra

Annak ellenére, hogy ilyesmit ténylegesen lerajzolni nem mindig lehet, képzeletben meg lehet csinálni, és már ez is sokszor segit a valószinüség tulajdonságainak vizsgálatakor. (Lásd A valószinüség további tulajdonságai c. pontban.)

9. Klasszikus problémák

"Klasszikus" jelzővel azért illetjük a most következő problématipust, mert a XVII. században a valószinüségszámitás ilyen jellegü feladatok kapcsán indult fejlődésnek Fermat (1601-1665), Pascal (1623--1662), Huygens (1629-1695) és James Bernoulli (1654-1705) munkássága során.

Gyakran találkozunk - különösen szerencsejátékokkal kapcsolatos feladatoknál - olyan véletlen jelenségekkel, melyeknél a biztos eseményt véges sok egyforma valószinüségü, egymást kizáró esemény összegére lehet bontani. Ilyenkor ezeket az eseményeket egyszerü eseményeknek nevezzük, és azt mondjuk, hogy klasszikus problémával állunk szemben. Például:

1. Ha egy jól összekevert magyarkártya-csomagból huzunk egy lapot, akkor reális abból kiindulni, hogy mind a 32 lap egyformán valószinü. Ezért egyszerü eseményeknek vehetjük a következő eseményeket:

A_1 = a piros 7-est huzzuk,

A_2 = a piros 8-ast huzzuk,

⋮

A_{32} = a zöld ászt huzzuk.

2. Ha egy szabályos dobókockával dobunk, akkor mind a 6 oldala $\frac{1}{6}$ valószinüséggel kerülhet felülre. Itt 6 darab egyszerü eseményt értelmezhetünk.

3. Ha két kockával (egy pirossal és egy fehérrel) dobunk, akkor az alábbi 36 lehetőség egyformán valószinü:

pf	pf	pf	pf	pf	pf
1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

p = piros kockán
f = fehér kockán

7. ábra

Itt 36 darab egyszerü eseményt értelmezhetünk.

Ha az egyszerü események száma n, akkor minden egyszerü esemény $\frac{1}{n}$ valószinüségü. Ugyanis jelöljük az egyszerü eseményeket $A_1, A_2, \ldots, A_n$-nel. $\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i$ és $A_i \cdot A_j = \phi$ $(i \neq j)$ miatt a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Ha az A_i események közös valószinüségét p-vel jelöljük, akkor $1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p$, ahonnan

$$P(A_i) = p = \frac{1}{n}.$$

Például:

1. P (a tök ászt huzom) $= \frac{1}{32}$.
2. Egy kockával dobva, P (6-ost dobunk) $= \frac{1}{6}$.
3. Két kockával dobva,

P (a piros kockán 4-est, a fehér kockán 6-ost kapunk) $= \frac{1}{36}$,
P (mindkét kockán 1-est kapunk) $= \frac{1}{36}$.

Ha egy B esemény bizonyos egyszerü események összegeként állitható elő, akkor B-t a szóban forgó egyszerü eseményekből összetevődő összetett eseménynek nevezzük. Ha a B esemény k darab egyszerü eseményből tevődik össze, akkor a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján nyilván $P(B) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$. Tehát egy összetett esemény valószinüsége olyan tört, melynek számlálója azt mutatja, hogy hány egyszerü eseményből tevődik össze az esemény, a nevezője pedig az összes egyszerü események száma. Például:

1. P (makkot huzok, de nem az ászt) $= \frac{7}{32}$.
2. Egy kockával dobva P (páros számot dobok) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
3. Két kockával dobva P (a dobott számok összege 10) $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Ugyanis az az esemény, hogy a dobott számok összege 10, három egyszerü eseményből tevődik össze: $10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$.

Megjegyzések:

1. Sokszor előfordul, hogy egy összetett eseményről csak némi leleményességet igénylő trükökkel lehet megállapitani, hogy hány egyszerü eseményből tevődik össze. Ezt a leleményességet sok feladat önálló megoldásával lehet megszerezni. A kombinatorika ismertebb képletein k (permutációk, kombinációk, variációk) tudása hasznos, de nem pótolja az önálló feladatmegoldást.

2. Hangsulyozzuk, hogy a fent emlitett $P(B) = \frac{k}{n}$ (ahol $k = \dots$, $n = \dots$) képlet csak akkor alkalmazható, ha az egyszerü eseményeknek választott események tényleg egyformán valószinüek. Például hibás az alábbi gondolatmenet.

Két kockával dobva a dobott számok összege 11 féle lehet: 2, 3, 4, ..., 12. A 11 lehetőség közül 1 jelenti azt, hogy az összeg 10-zel egyenlő, ezért (?!?) P (a dobott számok összege 10) $= \frac{1}{11}$.

Az okoskodásban az a hiba, hogy az emlitett 11 lehetőség nem egyformán valószinü: például P (a dobott számok összege 2) $= \frac{1}{36}$, P (a dobott számok összege 3) $= \frac{2}{36}$.

3. Nézzük az alábbi feladatot.

Feladat: Feldobunk két kockát (egy pirosat és egy fehéret). Mi a valószinüsége, hogy a piros kockán 6-ost kapunk?

1. megoldás: Az ábrán szemléltetett 36 egyszerű esemény közül a bevonalkázott 6 darab jelenti azt, hogy a piros kockán 6-ost kapunk:

pf	pf	pf	pf	pf	pf
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

8. ábra

Igy $\quad P(\text{a piros kockán 6-ost kapunk}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. ■

2. megoldás: Nem törődünk azzal, hogy a fehér kockával mi történik. Egyszerű eseményeknek vehetjük az alábbi 6 darab egyformán valószínű eseményt:

A'_1 = a piros kockán 1-est kapunk,

⋮

A'_6 = - " - 6-ost kapunk.

Ezen 6 darab egyszerű esemény közül az utolsónak a valószínűségét kérdezi a feladat, ami $P(A'_6) = \frac{1}{6}$. ■

A két megoldás mindegyike jó. Tanulságul azt szűrjük le, hogy mitőlünk, a feladat megoldóitól függ, hogy milyen eseményeket vesszük egyszerű eseményeknek. A lényeg csak az, hogy a felvett események egyformán valószínűek és egymást kizáróak legyenek, továbbá összegük a biztos esemény legyen, és a feladatban vizsgálandó esemény az általunk felvett események közül valahányból összetevődő legyen. A 2. megoldásban használt egyszerű események is tekinthetők egyszerű eseményeknek, de nem lennének alkalmasak arra, hogy a "dobott számok összege 10" esemény valószínűségét meghatározzuk.

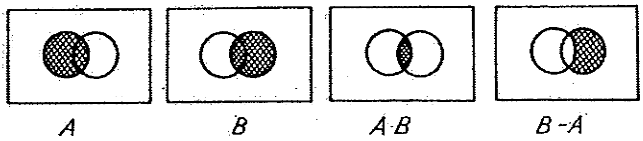
10. A valószínűség további tulajdonságai

A valószinüség axiómaként felvett tulajdonságaiból néhány ujabb tulajdonságot fogunk levezetni. Ezek igazságán persze senki sem fog meglepődni, hiszen ezek a tulajdonságok relativ gyakoriságokra átfogalmazva nyilvánvaló tényeket jelentenek, s a valószinüség fogalmát a relativ gyakoriságból vonatkoztattuk el. Valószinüségszámitási feladatok megoldása során ezeket a tulajdonságokat lépten-nyomon (nyilvánvalóságuk miatt sokszor észrevétlenül) felhasználjuk. Nem árt, ha "csokorba gyüjtjük őket".

Az egyes tételek állitását a tétel kimondása után rajz segitségével "láthatóvá" is próbáljuk tenni. (Emlékeztetőül: az alaphalmazt ugy kenjük be festékkel, hogy bármely esemény valószinüsége az eseménynek megfelelő halmazon lévő festék - mondjuk grammokkal kifejezett - mennyiségével egyenlő.) A rajzokon itt csak a halmazokat tüntetjük fel. A festéket csak képzeletben kenjük szét az alaphalmazon. Ha a Kedves Olvasó kivánja, ténylegesen fesse be vagy szines ceruzával satirozza be az ábrákat!

<u>1. tétel: Tetszőleges</u> A <u>és</u> B <u>eseményekre</u> $P(B) = P(A \cdot B) + P(B-A)$, <u>azaz</u> $P(B-A) = P(B) - P(A \cdot B)$.

Rajzban szemléltetve:



9. ábra

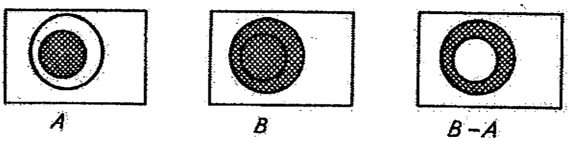
A B eseménynek megfelelő halmazon annyi festék van, amennyi az A·B illetve a B-A eseményeknek megfelelő halmazokon együttesen.

Példaként az 1. tételt átfogalmazzuk relativ gyakoriságokra: egy kisérletsorozatban B pontosan annyiad részben következik be, ahányad részben "A is és B is bekövetkezik", plusz ahányad részben "B bekövetkezik, de A nem következik be".

<u>Bizonyitás.</u> A·B és B-A egymást kizárják és összegük B-vel egyenlő: $(A \cdot B) \cdot (B-A) = \emptyset$, $(A \cdot B) + (B-A) = B$. Ezért a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján $P(B) = P(A \cdot B) + P(B-A)$. ■

A következő három tétel az 1. tétel következménye.

2. tétel: Ha A maga után vonja B-t, akkor $P(B-A) = P(B)-P(A)$
Rajzban szemléltetve:

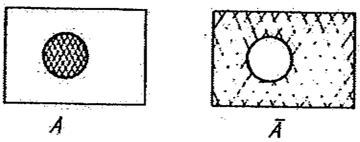


10. ábra

Ha egy halmaz részhalmaza egy másiknak, akkor a különbségükön annyi festék van, amennyivel több festék van a bővebb halmazon mint a szűkebb halmazon.

Bizonyitás: Ha A maga után vonja B-t, akkor $A \cdot B = A$, s igy $P(A \cdot B)$ helyett $P(A)$-t írhatunk az 1. tételben. ■

3. tétel: Tetszőleges A eseményre $P(\bar{A}) = 1-P(A)$.
Rajzban szemléltetve:

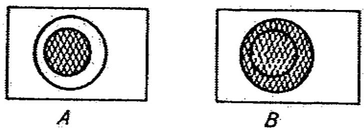


11. ábra

Mivel az alaphalmazon lévő festékmennyiség 1, az alaphalmaz tetszőleges részhalmazán és annak komplementumán együttesen egységnyi festékmennyiség található.

Bizonyitás: A maga után vonja Ω-t. Ezért az előző tételt alkalmazhatjuk $B = \Omega$ szereposztással. Azt kapjuk, hogy
$P(\bar{A}) = P(\Omega-A) = P(\Omega)-P(A) = 1-P(A)$. ■

4. tétel: Ha A maga után vonja B-t, akkor $P(A) \leq P(B)$.
Rajzban szemléltetve:



12. ábra

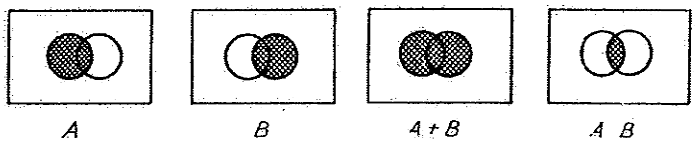
Ha egy halmaz részhalmaza egy másiknak, akkor ezen a halmazon legfeljebb annyi festék van, mint a másikon.

Bizonyitás: A 2. tétel szerint $P(B)-P(A) = P(B-A)$. Viszont $P(B-A) \geqslant 0$, s igy $P(B)-P(A) \geqslant 0$.

5. tétel: Ha A és B tetszőleges események, akkor

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \ .$$

Rajzban szemléltetve:



13. ábra

Két halmaz egyesitésén lévő festékmennyiséget ugy kaphatjuk meg, hogy a halmazokon lévő festékmennyiségeket összeadjuk, és ebből az összegből kivonjuk a két halmaz közös részén lévő festékmennyiséget.

Bizonyitás: Az $A \cdot \overline{B}$, $A \cdot B$ és $\overline{A} \cdot B$ események egymást kizárják, és

$$(A \cdot \overline{B}) + (A \cdot B) = A,$$

$$(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot B) = B,$$

$$(A \cdot \overline{B}) + (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot B) = A + B \ .$$

(Aki nem hiszi, járjon utána! Aki nem látja, rajzolja le!) Ezért a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján

$$P(A \cdot \overline{B}) + P(A \cdot B) = P(A),$$

$$P(A \cdot B) + P(\overline{A} \cdot B) = P(B),$$

$$P(A \cdot \overline{B}) + P(A \cdot B) + P(\overline{A} \cdot B) = P(A + B).$$

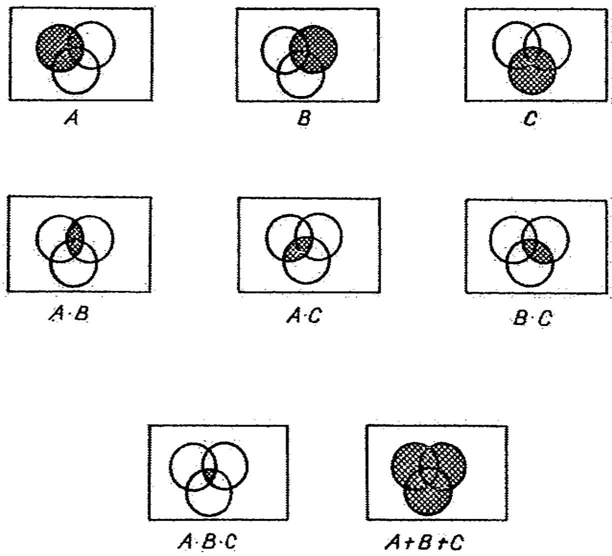
Az első két egyenlőség összegéből a harmadikat levonva kiadódik az állitás. ∎

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha A és B egymást kizáróak, akkor $P(A \cdot B) = P(\phi) = 0$, s így az 5. tétel állítása a valószínűség összegzési tulajdonságát adja vissza.

6. tétel: Ha A, B, C tetszőleges események, akkor

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cdot B)-P(A \cdot C)-P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

Remélhetőleg az alábbi ábrák magyarázat nélkül is elegendőek a tétel állításának és bizonyításának megértéséhez:



14. ábra

Háromnál több eseményre is általánosítható a tétel. Ezt az általánosítást egy érdekes feladat megoldásánál fogjuk felhasználni. Aki elriad a bonyolult szummajelektől, és nem kíváncsi arra, hogy egy egyszerűen megfogalmazható (de megoldani korántsem egyszerű!) problémával kapcsolatban hogyan bukkan fel a természetes logaritmus alapszáma, kihagyhatja a 7. tételt és a feladat megoldását. A megoldás utáni megjegyzést mindenképpen érdemes elolvasni.

7. tétel: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cdot A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r}) .$$

Bizonyitás: Az egyszerüség kedvéért csak azt mutatjuk meg, hogy $n=3$-ra hogyan jön ki a képlet az $n=2$-re érvényes képlet felhasználásával. Az, aki járatos a teljes indukciós bizonyitások technikájában, ennek alapján tetszőleges n-re le tudja vezetni a képletet.

Először az $(A_1 + A_2) + A_3$ zárójelezésnek megfelelően $n=2$-re alkalmazzuk a képletet:

$$P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1+A_2) + P(A_3) - P\,(A_1+A_2) \cdot A_3\,) .$$

A jobb oldalon, az első tagban az A_1 és az A_2 események összegére alkalmazhatjuk az $n=2$-re érvényes képletet:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

A harmadik tagban az $(A_1+A_2) \cdot A_3 = A_1A_3+A_2A_3$ azonosság alapján a $B_1 = A_1A_3$ és a $B_2 = A_2A_3$ események összegét kapjuk. Most is alkalmazhatjuk az $n=2$-re érvényes képletet:

$$P\big((A_1+A_2) \cdot A_3\big) = P(B_1+B_2) = P(B_1)+P(B_2) - P(B_1 \cdot B_2) =$$

$$= P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3).$$

Ezek felhasználásával - tessék ellenőrizni! - $n=3$-ra is kiadódik az állitott

$$P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1)+(P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3) +$$
$$+ P(A_1A_2A_3)$$

képlet. ■

Feladat: Egy mulatságon, melyen 10 házaspár Beatles számokra táncol, azt eszelik ki, hogy a változatosság kedvéért minden szám előtt kisorsolják, hogy ki kivel táncoljon. Minden férj nevét cédulára írják. Minden szám előtt a cédulákat kalapba teszik, minden feleség kihuz egy cédulát, és a soron következő számot azzal táncolja, akinek a nevét kihuzta. Vajon mi a valószinüsége annak, hogy minden feleség "hütlenkedik", azaz egyik sem a saját férjével táncol?

Megoldás: Aki elsőnek huz, az 10 cédula közül választ, aki másodiknak huz, az 9 cédula közül választ, és igy tovább, aki utolsónak huz, az csak 1 cédula közül választ. Ezért a 10 hölgy és a 10 férfi $10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 1 = 10!$ darab - nyilván egyformán valószinü - felállitásban táncolhat. Tehát klasszikus problémával van dolgunk, ahol egyszerü eseményeknek a lehetséges felállitásokat vesszük.

Jelöljük A_1-gyel azt az eseményt, hogy a legidősebb feleség a férjével táncol, A_2-vel azt az eseményt, hogy a második legidősebb feleség a férjével táncol, és igy tovább. A feladat az $\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\ldots\cdot\bar{A}_{10}$ esemény valószinüségét kérdezi. A De Morgan-azonosság felhasználásával
$P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\ldots\cdot\bar{A}_{10}) = P(\overline{A_1+A_2+\ldots+A_{10}}) = 1-P(A_1+A_2+\ldots+A_{10})$
adódik. A $P(A_1+A_2+\ldots+A_{10})$ valószinüséget a 7. tétel alapján fogjuk meghatározni. A tétel képletének jobb oldalán szereplő $P(A_{i_1}\cdot A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_r})$ $(1\leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n)$ valószinüség könnyen kiszámolható. Ha például $r = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 4$, $i_3 = 5$, akkor $A_1\cdot A_4\cdot A_5$ azt jelenti, hogy a kor szerint első, negyedik és ötödik feleség a férjével táncol. Ha csak ezektől a feleségektől kivánjuk meg, hogy férjükkel táncoljanak, akkor ez egy olyan összetett eseményt jelent, mely 7! darab egyszerü eseményből tevődik össze, hiszen a többi 7 hölgy és 7 férfi ennyiféle felállitásban táncolhat. Ezért $P(A_1\cdot A_4\cdot A_5) = \frac{7!}{10!} = \frac{(10-3)!}{10!}$. Ugyanezzel a

gondolatmenettel az is kiadódik, hogy $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r}) = \frac{(10-r)!}{10!}$.

Látjuk, hogy a tételben szereplő $\sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r})$ összeg minden tagja $\frac{(10-r)!}{10!}$-sal egyenlő. Ezért ez az összeg egyenlő a tagok száma szorozva $\frac{(10-r)!}{10!}$-sal. A tagok száma pedig annyi, ahányféleképpen az r darab $i_1, i_2, \ldots, i_r$ index az $1, 2, \ldots, 10$ szám közül kiválasztható, vagyis $\binom{10}{r}$. Ezért

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r}) = \binom{10}{r} \cdot \frac{(10-r)!}{r!} =$$

$$= \frac{10!}{r!(10-r)!} \cdot \frac{(10-r)!}{10!} = \frac{1}{r!}.$$

A tétel szerint

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{10}) = \sum_{r=1}^{10} (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + - \ldots - \frac{1}{10!}.$$

Ezért a kérdezett valószinüség

$$P(\text{minden feleség hütlenkedik}) = 1 - P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{10}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots + \frac{1}{10!}. \blacksquare$$

<u>Megjegyzés:</u> A megoldás gondolatmenetéből kiolvasható, hogy n házaspár esetén

$$P(\text{minden feleség hütlenkedik}) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}.$$

A feladat érdekessége, hogy $n \longrightarrow \infty$ esetén $\sum\limits_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} \rightarrow \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1}$, ahol e a természetes logaritmus alapszáma, $e = 2,71\ldots$.

Ezért azt mondhatjuk, hogy ha nagyon sok házaspár sorsolással dönti el, hogy ki kivel táncoljon, akkor körülbelül $\frac{1}{e}$ a valószínűsége annak, hogy minden feleség hűtlenkedik.

11. Majdnem biztos és majdnem lehetetlen események

A "Klasszikus problémák" c. pontban láttuk, hogy ha két kockát egyszerre feldobunk, akkor

$$P\,(\text{mindkét kockán 1-est kapunk}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6^2}\,.$$

Kézenfekvő, hogy ha egy kockát dobunk fel kétszer, akkor az "1. és 2. dobás eredménye 1-es" esemény valószínűsége ugyanennyi:

$$P\,(\text{az 1. és a 2. dobás eredménye 1-es}) = \frac{1}{6^2}\,.$$

Az is világos, hogy ha nem csak kétszer, hanem többször dobjuk fel a kockát, akkor az A_k = "az első k dobás eredménye mind 1-es" esemény valószínűsége $P(A_k) = \frac{1}{6^k}$. (Legalábbis elvileg) megtehetjük, hogy végtelen sokszor dobjuk fel a kockát. Legyen A = "a végtelen sok dobás mindegyike 1-es". Az A esemény nem lehetetlen, mert elképzelhető, hogy minden dobás eredménye 1-es legyen. Nyilván az A esemény maga után vonja az A_k eseményt akármilyen k-ra. Ezért $0 \leqslant P(A) \leqslant P(A_k) = \frac{1}{6^k}$. Az egyenlőtlenségek minden k-ra fennállnak, és $\frac{1}{6^k} \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, ezért az egyenlőtlenségekből következik, hogy $P(A) = 0$.

Tehát láthatjuk, hogy nemcsak a lehetetlen esemény valószínűsége 0. Léteznek a lehetetlen eseménytől különböző, 0 valószínűségű események, mint például a fenti A esemény. Természetesen egy 0 valószínűségű esemény sok kísérlet esetén elenyészően kis részben következik be. (Ha sok ember mindegyike végtelen sokszor feldobná a kockát, a kísérletet végrehajtó emberek számához viszonyítva csak nagyon-nagyon kevés embernél lenne - szinte senkinél sem lenne - minden dobás eredménye 1-es.) Ha a kísérletek (az emberek) számát n-nel jelöljük, akkor az A esemény $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakorisága n növekedtével tetszőlegesen kicsivé válna. Ezért a 0 valószinüségü eseményeket majdnem lehetetlen eseményeknek hivjuk.

Ha pedig egy esemény valószinüsége 1-gyel egyenlő, tehát komplementuma 0 valószinüségü, akkor az eseményt majdnem biztosnak nevezzük.

Megjegyzések:

1. A Kedves Olvasó nyilván észreveszi, hogy nemcsak annak a végtelen dobássorozatnak 0 a valószinüsége, melynél minden dobásra 1-est várunk. Akármilyen végtelen sorozatot is adunk meg az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból, 0 a valószinüsége annak, hogy a kockát végtelen sokszor feldobva a megadott számok a megadott sorrendben jöjjenek ki. Viszont a biztos esemény, vagyis, hogy Ω = "valamilyen sorozat kijön", ezeknek a 0 valószinüségü és egymást kizáró eseményeknek az összege. Ez látszólag ellentmond a valószinüség összegzési tulajdonságának, hiszen ha egy összegben minden összeadandó 0, akkor az összeg nem lehet 1-gyel egyenlő. A látszólagos ellentmondás magyarázata a következő: a valószinüség összegzési tulajdonságát csak véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok tagra mondtuk ki; az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból alkotható végtelen sorozatok száma pedig több mint megszámlálhatóan végtelen.

2. Tekintsünk egy A eseményt, és képzeljük el a következő játékot: Egymás után végrehajtunk több kisérletet. Ha egy kisérletnél bekövetkezik az A esemény, akkor nyerek a Ft-ot, ha nem következik be, akkor vesztek b Ft-ot. Kérdés: mikor igazságos ez a játék?

A következőképpen okoskodhatunk. Ha az A esemény valószinüségét p-vel, a végrehajtott kisérletek számát pedig n-nel jelöljük, akkor körülbelül a kisérletek p-nyi részében, tehát $n \cdot p$ játszma során a Ft-ot nyerek, a kisérletek $(1-p)$-nyi részében, tehát $n \cdot (1-p)$ játszma során b Ft-ot vesztek. Ezért a játék akkor igazságos, ha $n \cdot p \cdot a = n \cdot (1-p) \cdot b$, azaz $p \cdot a = (1-p) \cdot b$. A játék pedig veszteséges, illetve nyereséges számomra attól függően, hogy $p \cdot a < (1-p) \cdot b$ vagy $p \cdot a > (1-p) \cdot b$.

Vegyük észre, hogy ha $0 < p < 1$, akkor alkalmasan választott a és b értékekkel a játék lehet igazságos is, és számomra veszteséges vagy nyereséges is.

Viszont ha $P(A) = p = 0$, akkor $p \cdot a = 0 < b = (1-p) \cdot b$, tehát a játék mindenképpen veszteséges számomra. Vagyis annak ellenére, hogy 0 valószinüségü esemény bekövetkezhet, semmilyen tét esetén sem érdemes az esemény bekövetkezésére tippelni. Ez is alátámasztja azt a szóhasználatot és hozzáállást, hogy a 0 valószinüségü eseményeket majdnem lehetetlen eseményeknek hivjuk, és hogy az ilyen események bekövetkezésében nem bizunk.

Az elmondottak 1 valószinüségü eseményekre értelemszerüen átfogalmazva azt fejezik ki, hogy a majdnem biztos események bekövetkezésében nagyon is érdemes bizni (annak ellenére, hogy bekövetkezésük nem biztos).

II. FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG

1. Feltételes valószínűség

A feltételes valószinüség fogalmával az alábbi két példán keresztül fogunk megismerkedni.

<u>1. példa:</u> Azt a véletlen jelenséget vizsgáljuk, amikor két kockát feldobunk a következő feltételek mellett: a kockák szimmetrikusak, magasra dobjuk őket, és sik terepre esnek. Ekkor az

A = valamelyik kockán 6-ost kapunk

esemény az ábrázolt 36 egyszerü esemény közül a bejelölt 11-ből tevődik össze:

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

15. ábra

Ezért az A esemény valószinüsége: $P(A) = \frac{11}{36}$. ■

<u>2. példa:</u> Ha egy tombolán 6 ember között 2 jutalmat sorsolnak ki, akkor $\frac{1}{3}$ a valószinüsége annak, hogy én, aki a 6 ember egyike vagyok, nyerek valamilyen jutalmat. (Ugyanis a 6 ember közül $\binom{6}{2} = 15$ féleképpen kerülhet ki a 2 nyertes. Ezen 15 db egyformán valószinü esemény közül 5-ből tevődik össze az az esemény, hogy az egyik nyertes én vagyok; $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.) Ugyanezt igy is megfogalmazhatjuk; ha egy

urnában 6 darab cédula van, melyekre az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat irtuk fel, és közülük kihuzunk kettőt, akkor $\frac{1}{3}$ a valószinüsége annak, hogy pl. a 6-os feliratu cédula a kihuzott két cédula között van. Mindezt harmadikféleképpen is elmondhatjuk: ha két kockát feldobunk, és kiderül, hogy különböző számokat kaptunk rajtuk, akkor ilyen feltételek mellett $\frac{1}{3}$ a valószinüsége annak, hogy valamelyik kockán 6-ost kaptunk. ■

Amikor a valószinüség fogalmát bevezettük, hangsulyoztuk, hogy az események valószinüségéről csak meghatározott feltételekkel kapcsolatban, azaz meghatározott véletlen jelenségre vonatkoztatva beszélhetünk. Ha a véletlen jelenség módosul például azáltal, hogy további feltételeket veszünk, akkor az események valószinüsége megváltozhat. Ha az 1. példában leirt véletlen jelenséget azáltal módositjuk, hogy a feltételek közé vesszük a

$$B = \text{a két kockán különböző számokat kapunk}$$

esemény bekövetkezését, akkor az A esemény valószinüsége a 2. példában leirtak alapján $\frac{11}{36}$ -ről $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ -ra változik.

Más esetekben is előfordul, hogy egy B esemény bekövetkezését bevesszük a véletlen jelenséget körülhatároló feltételek közé. Egy A eseménynek eme módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüségét $P(A|B)$-vel jelöljük, és az eredeti véletlen jelenségben A-nak B-re vonatkozó <u>feltételes valószinüségének</u> nevezzük. A $P(A|B)$ képletet igy szokás olvasni: "pé A feltéve B". A fenti A és B eseményekre tehát $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

Általános esetben a valószinüség fogalmát a relativ gyakoriságokból vonatkoztattuk el. A feltételes valószinüség pedig egy speciálisan módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüség. Ezért a feltételes valószinüség matematikai definicióját is a relativ gyakoriságok "utmutatója" alapján adjuk meg.

Tekintsünk a vizsgált véletlen jelenséggel kapcsolatban két eseményt, A-t és B-t. Gondolatban végezzünk n darab kisérletet. Jelöljük n_A-val, n_B-vel illetve $n_{A\cdot B}$ -vel azon kisérletek számát, melyeknél A, B illetve A is B is bekövetkezik. Az $\frac{n_{A\cdot B}}{n_B}$ hányados mutatja, hogy azon kisérletek során, amikor B bekövetkezik, hányadrészben következik be B-vel együtt még az A is. Tehát ezt a hányadost tekinthetjük az A eseménynek a B bekövetkezésével módositott véletlen jelenségre vonatkozó relativ gyakoriságának. Ezért a $P(A|B)$ feltételes valószinüséget ebből a hányadosból vonatkoztatjuk el. Az

$$\frac{n_{A\cdot B}}{n_B} = \frac{\frac{n_{A\cdot B}}{n}}{\frac{n_B}{n}}$$

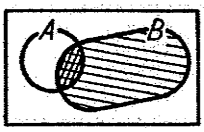
azonosság jobb oldalán az $A\cdot B$ esemény és a B esemény relativ gyakoriságának hányadosa áll.

Ezért kézenfekvő, hogy az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószinüségét matematikai modellünkben így értelmezzük:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

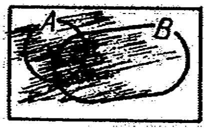
Ez a definició csak akkor értelmes, ha $P(B) \neq 0$. Ha $P(B) = 0$, akkor a $P(A|B)$ feltételes valószinüséget nem értelmezzük. Később (lásd a Feltételes eloszlások c. fejezetben) fogunk feltételes valószinüséget értelmezni bizonyos nulla valószinüségü eseményekre vonatkozólag is.

Ha a valószinüséget festékkel szemléltetjük, akkor a $P(A|B)$ feltételes valószinüség jelentése: az A és B eseményeknek megfelelő halmazok közös részén lévő festék mennyisége a B eseménynek megfelelő halmazon lévő festék mennyiségéhez viszonyitva:

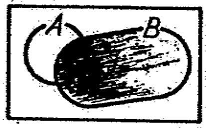


16. ábra

Ezért a B esemény bekövetkezésével módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüséget, azaz a B-re vonatkozó feltételes valószinüséget a következőképpen szemléltethetjük: a B eseménynek megfelelő halmazon kivül letöröljük a festéket, a halmazon belül pedig arányosan növeljük a megmaradó festéket ugy, hogy az összfestékmennyiség egységnyivé váljon:



A valószínűség szemléltetése festékkel



A B-re vonatkozó feltételes valószínűség szemléltetése festékkel

17. ábra

A $P(A \cdot B)$ és $P(B)$ valószínűségek ismeretében a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget a definíciós képlet alapján számolhatjuk ki: Az 1. példa véletlen jelenségére vonatkozólag $P(A \cdot B)$ = P (a dobott számok különbözőek és van köztük 6-os) $= \frac{10}{36}$, hiszen a 36 egyszerű esemény közül 10 jelenti az $A \cdot B$ esemény bekövetkezését:

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

18. ábra

$P(B) = \frac{30}{36}$, hiszen a B esemény a 36 elemi esemény közül 30-ból tevődik össze:

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

19. ábra

Igy a 2. példában mondottakkal összhangban: $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}$.

Más esetekben viszont a $P(A|B)$ feltételes valószinüséget - mint az A-nak a B bekövetkezésével módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüségét - logikai uton is kiszelhetjük. (A 2. példában ezt tettük.) Ilyen esetekben a definiciós képletet

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

alakban irva a $P(A \cdot B)$ valószinüség kiszámitására nyilik lehetőség. Ennek alkalmazására a következő pontban látunk példát.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha A maga után vonja B-t, akkor $A \cdot B = A$, s igy $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$.

2. A feltételes valószínűség szorzástétele

1. feladat: Egy 32 lapos magyarkártya-csomagot jól összekeverünk, és utána mindketten huzunk egy-egy lapot. Először én, utána te. Mi a valószinüsége annak az eseménynek, hogy én a tök ászt huzom, te pedig zöldet huzol?

Megoldás: Értelmezzük az alábbi eseményeket:

A_1 = én a tök ászt huzom,

A_2 = te zöldet huzol.

"Klasszikus" megfontolások alapján: $P(A_1) = \frac{1}{32}$, $P(A_2|A_1) = \frac{8}{31}$, s

igy $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{1}{32} \cdot \frac{8}{31} = \frac{1}{124}$. ■

2. feladat: Ha utánunk még ő is huz, akkor megkérdezhetjük, hogy mi a valószinüsége, hogy én a tök ászt huzom, te zöldet huzol, ő pedig a makk alsót, felsőt vagy királyt huzza?

Megoldás: Legyen

A_3 = ő a makk alsót, felsőt vagy királyt huzza.

Ha a $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$ összefüggést $B = A_1 \cdot A_2$, $A = A_3$ szereposztásban alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2).$$

$P(A_1 \cdot A_2)$-t továbbfejtve

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2)$$

adódik. Feladatunkban $P(A_3 | A_1 \cdot A_2) = \frac{3}{30}$, így $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$
$= \frac{1}{32} \cdot \frac{8}{31} \cdot \frac{3}{30} = \frac{1}{1240}$. ■

Kézenfekvő, hogy amit 3 eseménnyel kapcsolatban kaptunk, azt akárhány eseményre is általánosíthatjuk. Ezt hívják a feltételes valószínűségek szorzástételének. Például 5 eseményre így fest:

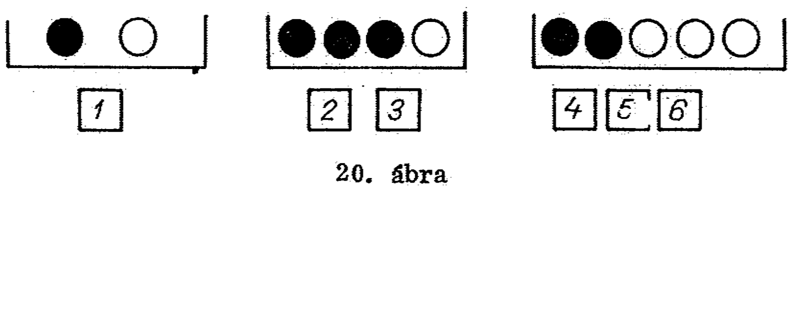
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot P(A_5 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4).$$

A képlet azt mutatja, hogy több esemény együttes bekövetkezésének valószínűségét hogyan lehet kiszámolni feltételes valószínűségek szorzataként.

3. A teljes valószínűség tétele

Feladat: Van három doboz. Az elsőben 1 piros és 1 fehér, a másodikban 3 piros és 1 fehér, a harmadikban 2 piros és 3 fehér golyó van. Feldobunk egy dobókockát. Ha 1-est dobunk, akkor az első, ha 2-est vagy 3-ast, akkor a második, ha 4-est vagy 5-öst vagy 6-ost dobunk, akkor a harmadik dobozból "csukott szemmel" huzunk egy golyót.



20. ábra

Mi annak az A eseménynek a valószinüsége, hogy a kihuzott golyó piros?

Megoldás: Jelölje B_i azt az eseményt, hogy az i-dik dobozból huzunk, ($i = 1,2,3$). Az alábbi valószinüségek és feltételes valószinüségek "klasszikus" megfontolásokkal egyszerüen adódnak:

$$P(B_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(B_2) = \frac{2}{6}, \qquad P(B_3) = \frac{3}{6},$$

$$P(A|B_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(A|B_2) = \frac{3}{4}, \qquad P(A|B_3) = \frac{2}{5}.$$

Az AB_1, AB_2, AB_3 események egymást kizárják, és összegük A-t adja. Ezért a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján

$$P(A) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + P(A \cdot B_3) =$$

$$= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}. \blacksquare$$

E példa lényegét próbáljuk most megragadni. Ehhez bevezetünk egy uj fogalmat, a teljes eseményrendszer fogalmát.

Azt mondjuk, hogy a (véges és végtelen sok) $B_1, B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást kizáróak, és együttesen a biztos eseményt adják, azaz $B_i \cdot B_j = \phi$, ha $i \neq j$, és $B_1 + B_2 + \dots = \Omega$.

Ezzel az elmondott példa lényegét igy foglalhatjuk össze.

A teljes valószinüség tétele: Ha a B_1, $B_2, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges A eseményre

$$P(A) = \sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i).$$

Ez a képlet lehetőséget ad arra, hogy egy esemény valószinüségét kiszámitsuk egy teljes eseményrendszer tagjaira vonatkozó feltételes valószinüségeiből.

4. Bayes-tétel
(ejtsd: béjsz)

Feladat: Barátomnak elmondom, hogy: "Van három doboz, az elsőben 1 piros és 1 fehér, a másodikban 3 piros és 1 fehér, a harmadikban 2 piros és 3 fehér golyó van. Feldobok egy dobókockát. Ha 1-est dobok, akkor az első, ha 2-est vagy 3-ast, akkor a második, ha 4-est vagy 5-öst vagy 6-ost, akkor a harmadik dobozból csukott szemmel huzok egy golyót." Ezek után elvégzem a kisérletet ugy, hogy ő nem lát semmit, csak a végén közlöm vele, hogy "piros golyót huztam". Megkérdezem tőle: "Mit gondolsz, melyik dobozból huztam?" Hogyan fog barátom gondolkodni?

Megoldás: Barátom okos, ezért igy gondolkodik. Az A esemény bekövetkezése még nem dönti el, hogy a B_1, B_2, B_3 események közül melyik következik be. (A, B_1, B_2, B_3 ugyanazt jelöli, mint a teljes valószinüség tételét illusztráló példában.) Tehát a kérdésre valószinüségekkel kell felelni, méghozzá a $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$, $P(B_3|A)$ feltételes valószinüségekkel. Ezeket igy számolhatjuk ki:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A|B_i)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{32},$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2A)}{P(A)} = \frac{P(B_2)\cdot P(A|B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A|B_i)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{32},$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3A)}{P(A)} = \frac{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A|B_i)} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{12}{32}.$$

A kapott feltételes valószinüségek elemzésével láthatjuk, hogy a legvalószinübb az, hogy a piros golyót a 2. dobozból huztuk. A legvalószinütlenebb pedig az, hogy a piros golyót az 1. dobozból huztuk. ■

Más feladatoknál is gyakran van szükség a fentiekhez hasonló feltételes valószinüségek kiszámitására. Ezért érdemes általánosan is megfogalmazni ezeket a formulákat.

Bayes tétel: Ha a $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A | B_k)}{\sum\limits_i P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$$

Ez a képlet lehetőséget ad arra, hogy egy teljes eseményrendszer tagjainak valamilyen A eseményre vonatkozó feltételes valószinüségeit az A eseménynek a teljes eseményrendszer tagjaira vonatkozó feltételes valószinüségeiből kiszámitsuk.

5. Feltételes valószínűségekkel kapcsolatos feladatokról

Nem szabad azt hinni, hogy a tanult formulákkal minden feltételes valószinüségekkel kapcsolatos feladat közvetlenül megoldható. Egy összetettebb problémánál a feladat megoldójának kell lebontani a problémát olyan részekre, melyekre már közvetlenül tudja alkalmazni az általa ismert formulákat. Erre példa a következő feladat.

Feladat: Az előző két pontban emlitett három doboz valamelyikéből a kockadobás eredményétől függően most nem egy, hanem két golyót huzunk. Feltéve, hogy az egyik golyó piros, mi a valószinüsége annak, hogy a másik fehér?

Megoldás: Mivel az "egyik piros, a másik fehér" esemény maga után vonja az "egyik piros" eseményt,

$$P(\text{egyik piros, a másik fehér} | \text{egyik piros}) = \frac{P(\text{egyik piros, a másik fehér})}{P(\text{egyik piros})} .$$

A törtben szereplő két valószinüséget a teljes valószinüség tétele segitségével számolhatjuk ki:

$$P(\text{egyik piros, a másik fehér}) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{3 \cdot 1}{\binom{4}{2}} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2 \cdot 3}{\binom{5}{2}} = \frac{19}{30} ,$$

$$P\,(\text{egyik piros}) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{2}{6}\cdot 1 + \frac{3}{6}\cdot \frac{2\cdot 3+1}{\binom{5}{2}} = \frac{17}{20}.$$

Tehát a kérdezett feltételes valószinüség $\dfrac{\frac{19}{30}}{\frac{17}{20}} = \dfrac{38}{51}$. ■

Megjegyzések:

1. Vigyázni kell, hogy a formulák alkalmazásánál a valószinüség jelölésére használt P betü mindig ugyanarra a véletlen jelenségre vonatkozzon. Ha erre nem vigyázunk, akkor ebből hibás eredmények származhatnak. Ezt mutatjuk most be a feltételes valószinüség definicióját megelőző két példa kapcsán (lásd: 36-37. oldal). Ugyanis a 2. példa megoldásában azért nem irtunk képleteket, mert ott - mint a 2. példa harmadikféle megfogalmazásából kitünt - az 1. példa véletlen jelenségéhez képest módositott véletlen jelenségről volt szó. Ottani céljaink miatt az 1. és a 2. példa jelölésrendszerét összhangban akartuk tartani. Ezt az összhangot megsértettük volna, ha a 2. példa megoldásában ilyesmit irtunk volna: P(jutalmat nyerek) $= \frac{1}{3}$, hiszen ennek alapján automatikusan leirtuk volna azt is, hogy $P(A) = \frac{1}{3}$. Ez pedig helytelen lett volna, hiszen az 1. példa eredménye szerint $P(A) = \frac{11}{36}$. Természetesen, ha valaki csak a 2. példával foglalkozik, akkor joga van az ottani véletlen jelenségekre vonatkozó valószinüségeket P-vel jelölni, és akkor irhatja, hogy $P(A) =$ P(jutalmat nyerek) $= \frac{1}{3}$. De ha az 1. és 2. példa jelöléseit összhangban akarjuk tartani, akkor $P(A\,|\,B) = \frac{1}{3}$ alakban kell kifejeznünk a 2. példa eredményét.

2. A "kezdőnek" nehézséget okoz, hogy egyes feladatoknál nem triviális, hogy a véletlen jelenséget hogyan célszerü megválasztani és rögziteni, hogy utána a kérdezett feltételes vagy feltétel nélküli valószinüséget kiszámithassa az általa ismert formulákkal. Az ügyes választás képességét sok feladat megoldásával lehet elsajátitani.

3. Mivel a véletlen jelenség megválasztásában a feladat megoldója dönt, a feladat megoldójától is függ, hogy egy - a feladattal kapcsolatos - valószinüség feltételes-e vagy feltétel nélküli.

III. FÜGGETLENSÉG

1. Két esemény függetlensége

Egyszerre feldobunk egy pénzérmét és egy dobókockát. Ha a pénzt és a kockát jó magasra dobjuk, akkor annak ellenére, hogy egyszerre dobjuk fel őket, semmi köze sincs a pénz dobás eredményének a kockadobás eredményéhez. Az a tény, hogy az érmén a "fej" van felül, nem nyujt semmi információt arra vonatkozólag, hogy a kockadobásnak mi lett az eredménye. Ha én a kockán például 6-ost szeretnék, sem boldogabb sem szomorubb nem leszek, ha az érme egy kicsit előbb nyugszik meg az asztalon, és az érmén a "fej" van felül. Mindezt azzal a szóhasználattal fejezzük ki, hogy a kockadobás eredménye <u>független</u> a pénzdobás eredményétől.

Most egy példa kapcsán megvizsgáljuk, hogy hogyan nyujthat információt egy esemény bekövetkezése vagy be nem következése egy másik eseményre vonatkozólag. Az események függetlenségének matematikai definicióját ennek megfelelően fogjuk értelmezni.

Ugy tapasztaltam, hogy a nyári napok $\frac{6}{12}$ -edrészében esik eső Budapesten, $\frac{5}{12}$ -ed részében esik eső a Balatonon, és $\frac{4}{12}$ -ed részében esik eső itt is, ott is.

Ha A-val jelöljük azt az eseményt, hogy egy kiszemelt napon a Balatonon esik az eső, B-vel pedig azt, hogy ugyanazon a napon esik az eső Budapesten, akkor tehát $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{6}{12}$, $P(A \cdot B) = \frac{4}{12}$.

Vizsgáljuk az alábbi szituációt: én Budapesten vagyok, kedves ismerősöm a Balatonon nyaral, és Budapesten éppen esős nap van. Vajon én - tudván, hogy Budapesten esős nap van - mit tudok mondani arról, hogy a Balatonon esik-e az eső? Nyilván eshet is, meg nem is. Vagyis a kérdésre csak az A esemény valószinüségének, méghozzá a B eseményre vonatkozó feltételes valószinüségének megadásával felelhetek.

Esetünkben $P(A|B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{12}}{\frac{6}{12}} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12}$. Vagyis annak tudatában, hogy a B esemény bekövetkezett, módosul az A eseményre vonatkozó ismeretem: $P(A) = \frac{5}{12}$ helyett $P(A|B) = \frac{8}{12}$ "erősséggel fogok kedves ismerősömért aggódni".

És mi van akkor, ha tudom, hogy Budapesten nem esik az eső? Ilyen ismeret birtokában "mennyire kell aggódnom kedves ismerősömért?"

Felelet: $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\cdot\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)-P(A\cdot B)}{1-P(B)} = \frac{\frac{5}{12}-\frac{4}{12}}{1-\frac{6}{12}} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Láthatjuk, hogy ha a vizsgált napon Budapesten nem esik az eső, akkor a Balatonon is kevésbé valószínű az eső. Ez pedig hasznos információ!

Vegyük észre, hogy a budapesti esőzés bekövetkezése vagy be nem következése azért nyujt információt a balatoni esőzésre vonatkozólag, mert $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|\overline{B})$ nem egyenlőek. Ha egyenlőek volnának, akkor mindenképpen "ugyanolyan erősséggel kellene kedves ismerősömért aggódnom", az A eseményre vonatkozólag nem válnék okosabbá a B esemény bekövetkezésének, illetve be nem következésének ismeretében.

Ezért azt mondjuk, hogy <u>az A esemény független a B eseménytől</u>, ha $P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

$P(B) = 0$ esetén a $P(A|B)$, $P(B) = 1$ esetén a $P(A|\overline{B})$ feltételes valószínűségnek nincs értelme. Ezért $P(B) = 0$ vagy 1 esetén a függetlenség definicióját külön kell megadni: $P(B) = 0$ vagy 1 esetén mindig <u>függetlennek mondjuk</u> A-t B-től. (Ezt a következőkkel motiválhatjuk: $P(B) = 0$ vagy 1 esetén a B bekövetkezésétől nem nagyon válhatunk okosabbá A-ra vonatkozólag. Ugyanis $P(B) = 1$ esetén B majdnem biztos, tehát bekövetkezése nem lep meg minket, bekövetkezéséből nem vonunk le különösebb következtetéseket, $P(B) = 0$ esetén pedig B majdnem lehetetlen, tehát nem nagyon következik be.)

A következő tételben A-nak B-től való függetlenségét olyan összefüggéssel jellemezzük, melyben A és B szerepe szimmetrikus. Ezért igaz, hogy ha A független, B-től, akkor B is független A-tól. Ez teszi jogossá azt a szóhasználatot, hogy "A <u>és</u> B <u>függetlenek egymástól</u>".

<u>1. tétel:</u> <u>(szorzási szabály két független eseményre). Az A esemény akkor és csak akkor független a B eseménytől, ha</u> $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$.

<u>Bizonyitás:</u>

a) Tegyük fel, hogy A független B-től. Ekkor

1. $P(B) = 1$ esetén $P(A\cdot B) = P(A) = P(A)\cdot P(B)$.
2. $P(B) = 0$ esetén $P(A\cdot B) = 0 = P(A)\cdot P(B)$.

3. $0 < P(B) < 1$ esetén a feltételes valószínűség és a függetlenség definíciója szerint $\frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = P(A|B) = P(A)$, ahonnan $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Tehát teljesül a szorzási szabály.

b) Tegyük fel, hogy $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

1. $P(B) = 1$ vagy 0 esetén definíció szerint A független B-től.
2. $0 < P(B) < 1$ esetén így okoskodhatunk:

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A \cdot B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}),$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cdot \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B})}{P(\overline{B})} = P(A).$$

Tehát teljesül a függetlenséget jelentő $P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B})$ egyenlőség. ■

Megjegyzések:

1. Bizonyára feltűnt, és a bizonyításból is látható, hogy a definícióban $P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B})$ helyett elég lett volna $P(A) = P(A|B)$-t feltenni, mert ennek már következménye $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ (lásd a bizonyítás a/3 részét), amiből viszont következik $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ (lásd a bizonyítás b/2. részét) és $P(A) = P(A|\overline{B})$. Mégis így mondtuk ki a definíciót, mert kettőnél több esemény függetlenségének definíciójában már nem hagyhatók el az itt fölöslegesnek bizonyuló egyenlőségekkel analóg egyenlőségek.

2. Két esemény függetlensége egyes esetekben a véletlen jelenség és az események értelmezéséből adódik. Például az a két esemény, hogy a magasra feldobott pénzérmén "fej", a dobókockán pedig 6-os adódik, független egymástól. Ezért ha az érme és a kocka szimmetrikus, akkor a P(az érmén "fej", a kockán 6-os adódik) valószínűséget a szorzási szabály alapján $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ -nek kell vennünk. Ha pedig ismerjük a $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cdot B)$ valószínűségeket, akkor a definíció vagy a $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ kritérium alapján dönthetünk az A és B események függetlensége felől. Például szimmetrikus dobókocka esetén az A = "3-nál nagyobb számot dobunk", B = "3-mal osztható számot dobunk" események függetlenek: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ (két db hárommal

osztható szám van a dobókockán a 3-as és a 6-os), $P(A \cdot B) = \frac{1}{6}$ (3-nál nagyobb 3-mal osztható szám a dobókockán csak egyetlen van: a 6-os) miatt $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ teljesül.

Gyakori hiba szokott lenni, hogy a független események fogalmát összetévesztik az egymást kizáró események fogalmával. Pedig - éppen ellenkezőleg - a következő igaz:

2. tétel: Ha az A és B események kizárják egymást, és nem nulla a valószínűségük, akkor nem lehetnek egymástól függetlenek.

Bizonyítás: Mivel A és B egymást kizárják, $A \cdot B = \phi$, s így $P(A \cdot B) = 0$. $P(A)$-ról és $P(B)$-ről feltételeztük, hogy nem egyenlők nullával, így szorzatuk sem nulla. Tehát nem teljesül a függetlenséget jelentő szorzási szabály. ■

2. Több esemény függetlensége

Dobjunk fel egy 1 és egy 2 forintos érmét, és legyen

A_1 = az 1 forintos érme fejre esik,

A_2 = a 2 forintos érme fejre esik,

A_3 = vagy mindkettő fejre, vagy mindkettő írásra esik.

Nyilvánvaló, hogy $P(A_3) = P(A_3 | A_1) = P(A_3 | \overline{A}_1) = \frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy A_3 független A_1-től. Hasonlóan látható, hogy A_3 független A_2-től is. Valóban: ha csak az A_1 vagy az A_2 bekövetkezését vagy be nem következését tudjuk meg, akkor A_3-ra nézve nem válunk okosabbá. Ha viszont mindkét eseményt, azaz az A_1, A_2 eseménypárt meg tudjuk figyelni, akkor ez már olyannyira hasznos információt nyujt A_3-ra nézve, hogy A_3 bekövetkezését vagy be nem következését ez alapján el is tudjuk dönteni. Tehát A_3 nem független az A_1, A_2 eseménypártól. A_3 pontosan akkor következik be, ha $A_1 \cdot A_2$ vagy $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$ bekövetkezik.

Az A_3 esemény akkor lenne független az A_1, A_2 eseménypártól, ha A_1 és A_2 bekövetkezésének illetve be nem következésének semmilyen kombinációjától sem válnánk okosabbá A_3-ra vonatkozólag, azaz A_3 független lenne az alábbi események mindegyikétől:

$$A_1 \cdot A_2, \quad A_1 \cdot \bar{A}_2, \quad \bar{A}_1 \cdot A_2, \quad \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2.$$

Azt mondjuk, hogy <u>az A_3 esemény független az A_1, A_2 eseménypártól</u>, ha A_3 független minden olyan eseménytől, mely az A_1, A_2 események és komplementumaik segítségével szorzatként állítható elő.

Ezek után nem szorul magyarázatra a következő két definíció.

Azt mondjuk, hogy <u>az A_{k+1} esemény független az $A_1, \ldots, A_k$ események rendszerétől</u>, ha A_{k+1} független minden olyan eseménytől, mely az $A_1, \ldots, A_k$ események és komplementumaik segítségével szorzatként állítható elő.

Azt mondjuk, hogy <u>az $A_1, A_2, \ldots$ események</u> (véges vagy végtelen) <u>sorozata független</u>, ha az első valahány esemény bekövetkezésének illetve be nem következésének semmilyen kombinációja sem nyújt információt a soron következő eseményre vonatkozólag, azaz ha minden k-ra az A_{k+1} esemény független az $A_1, \ldots, A_k$ események rendszerétől.

Az alábbi tételben olyan összefüggéssel jellemezzük az események sorozatának függetlenségét, melyben nem jut szerephez az események sorrendje. Ezért több eseménnyel kapcsolatban sem kell az események sorrendjére tekintettel lenni. A sorrendre utaló "sorozat" szó elhagyható, és mondhatjuk, hogy "<u>az $A_1, A_2, \ldots$ események függetlenek egymástól</u>".

<u>Tétel: (szorzási szabály több független eseményre). Az $A_1, A_2, \ldots$ események sorozata akkor és csak akkor független, ha akárhogy is veszünk ki közülük néhányat, ezek együttes bekövetkezésének valószínűsége a külön-külön vett valószínűségek szorzatával egyenlő, azaz</u>

$i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ <u>esetén</u> $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) =$

$= P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$

A tétel bizonyítását nem részletezzük. Hasznos, ha a Kedves Olvasó három vagy négy eseményből álló sorozatra végiggondolja a bizonyítást.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fentebb pénzdobálással kapcsolatban definiált A_1, A_2, A_3 eseményekre igaz, hogy

A_1 és A_2 függetlenek egymástól,

A_1 és A_3 függetlenek egymástól,

A_2 és A_3 függetlenek egymástól,

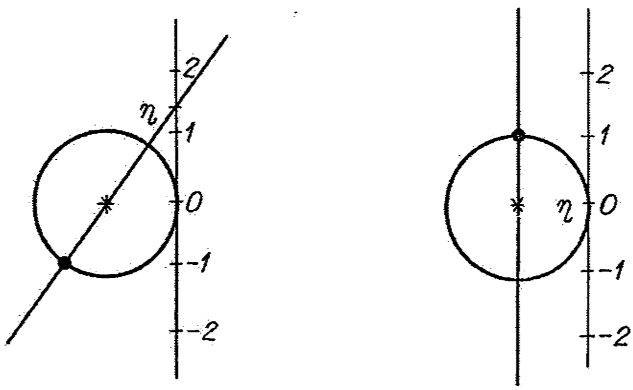
de a három esemény együtt már nem független egymástól. Jegyezzük meg tanulságul, hogy több esemény páronkénti függetlenségéből nem következik, hogy ezek az események együttesen is függetlenek lennének.

IV. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ

1. Valószínűségi változó

1. Budapest délutáni csucsforgalmában - sajnos - történnek balesetek. Egyik nap több, másik nap kevesebb. Sohasem lehet pontosan tudni, hogy hány baleset lesz. Csak annyit tudhatunk előre, hogy a balesetek száma nem negativ egész szám, és hogy ez a szám véletlentől függ.

2. Képzeljünk el egy kör alaku pályát. A kör egyik érintőjére számegyenest veszünk fel. A pályán elinditunk egy golyót. A golyó gurul körbe-körbe, s ki tudja hol, megáll. A golyót és a kör középpontját összekötő egyenes a számegyenest egy pontban metszi. Jelöljük a metszéspontot η-val. Ha az egyenesek párhuzamosak, és ezért nem metszik egymást, akkor η-t vegyük 0-nak.



21. ábra

Látjuk, hogy η tetszőleges valós értéket felvehet és értéke véletlentől függ.

Az ilyen "véletlentől függő számértéket" valószinüségi változónak nevezzük. Valószinüségi változókat ugy definiálhatunk, hogy egy véletlen jelenséggel kapcsolatban értelmezünk egy számmal mérhető mennyiséget. Jelölésükre általában görög kisbetük használatosak, leggyakrabban ξ (kszi), η (eta), ζ (dzeta). Például:

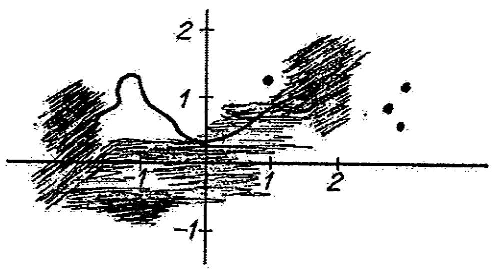
1. ξ = ahány baleset történik Budapesten a délutáni csucsforgalomban.

2. ξ = amennyit reggelente a megállóban várnom kell a villamosra.

A valószinüségi változók matematikai leirásához szükségünk van az eloszlás fogalmára. Ezzel ismerkedünk meg a következő pontban.

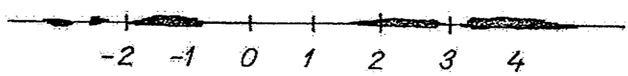
2. Eloszlás

Vegyünk valahonnan festéket, és kenjük szét a sikon. Pacákat is ejthetünk, vonalakat is huzhatunk, pöttyöket, sőt kis festékcsomókat is rakhatunk. Ugy, ahogy nekünk tetszik. Ha ezt megtettük, akkor megadtunk a sikon egy eloszlást.



22. ábra

Ha nem a sikot, hanem az egyenest kenjük be festékkel, akkor az egyenesen adunk meg egy eloszlást.



23. ábra

Matematikailag az ilyen eloszlásokat ugy lehet leirni, hogy a sik illetve az egyenes részhalmazaira megmondjuk, hogy mennyi festék (például hány gramm) került az illető részhalmazra. Ennek a problémakörnek az egzakt tárgyalása a mértékelmélet témakörébe tartozik. Mértékelmélettel nem áll szándékunkban foglalkozni, de az eloszlás szemléletes fogalmára - mint a valószinüségszámitás technikai segédeszközére - támaszkodni fogunk.

Most egy olyan fogalomról lesz szó, amit a későbbiekben nem fogunk használni. Éppen azt fogjuk elmagyarázni, hogy miért kellene használnunk, és mégis miért nem fogjuk használni. Mint a mértékelméletben kiderül - nem mindig lehet ellentmondásmentesen hozzárendelni a sík illetve az egyenes összes részhalmazához egy-egy számértéket, mely mutatná, hogy az illető részhalmazon mennyi festék van. (Vannak nagyon "csunya", képzeletünket messze felülmuló részhalmazok a síkon és a számegyenesen!) A sík illetve az egyenes részhalmazainak egy igen tág osztályára az un. Borel-halmazok osztályára ez mindig megtehető, de a Borel-halmazok osztályába nem tartozó halmazokra nem. Itt mi most nem fogjuk definiálni a Borel-halmaz fogalmát, csak az alábbi észrevételeket tesszük:

1. Az intervallumok a számegyenesen, a geometriában megismert alakzatok (körlap, sokszögekkel határolt síkidomok stb.) a síkon, és általában a nyilt vagy zárt halmazok mind Borel-halmazok.

2. Borel-halmazok komplementuma, különbsége, (véges vagy megszámlálhatóan végtelen) uniója, metszete ugyancsak Borel-halmaz.

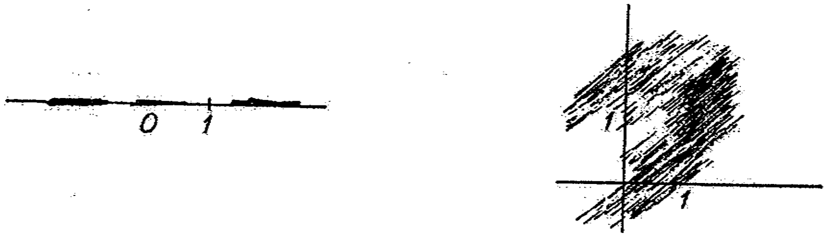
Tehát nem kell elkeserednünk, hogy vannak "kellemetlenkedő", nem Borel-halmazok, hiszen

1. Az elmélet kifejtéséhez és a gyakorlati alkalmazásokhoz szükséges halmazok Borel-halmazok.

2. A Borel-halmazok osztályából nem vezetnek ki azok a halmazelméleti müveletek, melyeket okoskodásaink, számításaink során használni fogunk.

Nem is akarjuk zavarni az Olvasót a nem definiált Borel-halmaz fogalmának minduntalan emlegetésével. Ha a későbbiekben a sík vagy az egyenes valamilyen részhalmazát emlitjük, akkor mindig Borel-halmazra gondolunk. Igy például, ha a sík vagy az egyenes összes részhalmazáról beszélünk, akkor is csak az öszszes Borel-halmazra gondolunk. Jobb, ha az Olvasó a valószinüségszámitással való első találkozásakor nem fordit figyelmet a mértékelméletnek erre a technikai jellegü fogalmára.

A valószinüségszámitásban az olyan eloszlások fontosak, melyeknél a szétkent festék összmennyisége egységnyi. Ezért az ilyen eloszlásokat valószinüségeloszlásoknak nevezzük. A valószinüségeloszlás szemléletes jelentése tehát: egységnyi festékmennyiség szét van kenve valahogyan.



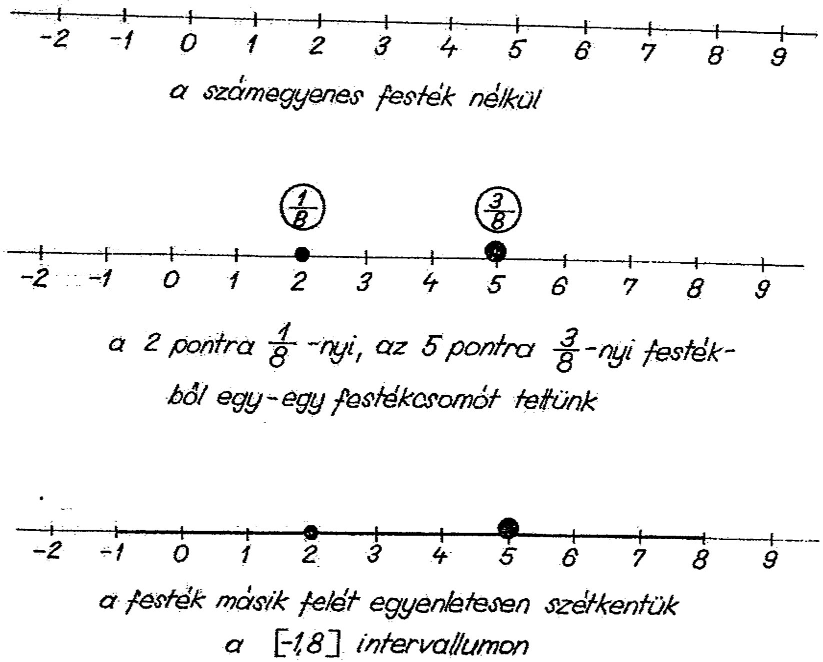
valószinüségeloszlás

a számegyenesen a sikon

24. ábra

3. Eloszlások típusai

Vegyünk egy vödör, azaz egységnyi festéket. A 2 pontra tegyük a festék $\frac{1}{8}$-át, a festék $\frac{3}{8}$-át pedig tegyük az 5 pontra. Igy két festékcsomót kapunk. A festék másik felét kenjük szét a $[-1, 8]$ intervallumon egyenletesen:



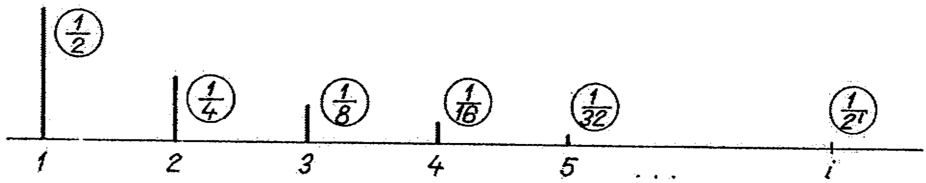
25. ábra

Ezáltal megadtunk egy valószínüségeloszlást a számegyenesen.

A megadott eloszlás "két szélsőséges részből tevődik össze". Az egyik rész "csupa csomóból áll", a másik rész "csomómentes". A gyakorlatban előforduló eloszlások leggyakrabban nem ilyenek. Többnyire vagy "csak csomóból állnak", vagy "csomómentesek". Az előbbieket diszkrét eloszlásoknak, az utóbbiakat folytonos eloszlásoknak nevezzük. Az olyan eloszlásokat, melyek diszkrét és folytonos részből tevődnek össze - mint a fenti példában -, kevert eloszlásoknak nevezzük. A következő három pontban e három tipust vesszük sorra.

4. Diszkrét eloszlás

Diszkrét eloszlásokat ugy adhatunk meg, hogy megadjuk a festékcsomók helyét és nagyságát. Ábráinkon a festékcsomók helyét számokkal vagy betükkel kiirjuk, a festékcsomó nagyságát pedig bekarikázott számokkal jelöljük. Diszkrét eloszlásokat célszerü ugy is szemléltetni, hogy a festékcsomó helyére olyan magas "pálcikát" rajzolunk, amennyi festék a pontra kerül. Például, ha az i-ik pozitiv egész számra $\frac{1}{2^i}$ nagyságu festékcsomó kerül, akkor egy olyan eloszlást kapunk, ahol az első festékcsomó $\frac{1}{2}$ nagyságu, a többi pedig fele akkora mint az őt megelőző. Az eloszlást pálcikákkal szemléltetve:



26. ábra

Ha az eloszlást nem akarjuk szemléltetni, csak az adatait akarjuk rögziteni, akkor ezeket célszerü táblázatba foglalni. Például:

1	2	3	4	5	...	i	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...	$\frac{1}{2^i}$	...

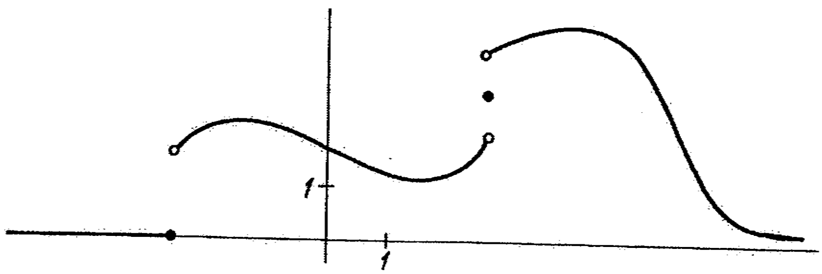
27. ábra

Egy diszkrét eloszlás nyilván akkor valószinüségeloszlás, ha a pálcikák hosszának összege 1.

5. Folytonos eloszlás

Az alábbi konstrukcióval eljuthatunk a gyakorlatban fontos folytonos eloszlásokhoz.

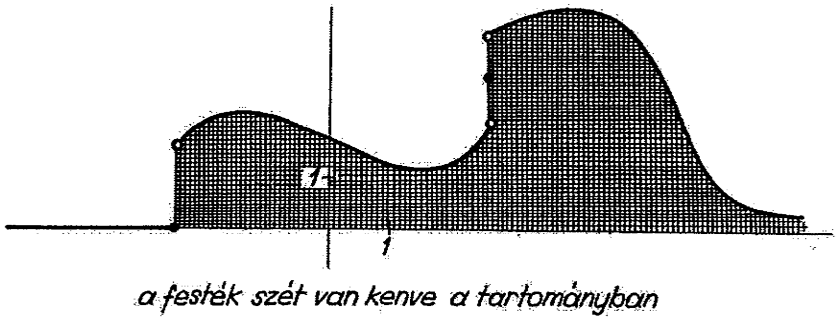
Tekintsünk egy nem negativ értékeket felvevő, integrálható függvényt a számegyenesen. (Például ha egy nem negativ értékeket felvevő függvény véges sok hely kivételével folytonos, akkor integrálható a számegyenesen. A számegyenesen vett integráljának értéke véges vagy végtelen.) Ábrázoljuk a függvény grafikonját:



28. ábra

Lakásfestéskor egy jó festő egyenletesen keni be a falat festékkel. Ez annyit jelent, hogy egyforma területü felületdarabokra ugyanannyi (pl. ugyanannyi gramm) festék kerül. Másképpen kifejezve: valamely falrészre kerülő festék mennyisége arányos a falrész területével. A mértékegységek alkalmas módositásával elérhetjük, hogy minden falrészen az uj mértékegységekkel kifejezve annyi festék legyen, mint amennyi a falrész területe.

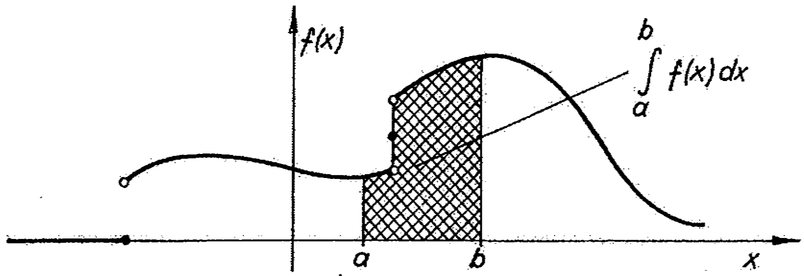
Képzeletben mi is igy kenjünk szét festéket a tekintett függvény grafikonja és az abszcissza tengely közötti tartományban. Tehát a tartomány minden részhalmazára annyi festék kerül, amennyi a részhalmaz területe. Ezután "jön az uthenger", és függőleges irányból összenyomja a sikot ugy, hogy a festék az abszcissza tengelyen felvett számegyenesre préselődjön. Ily módon egy eloszlást kaptunk a számegyenesen. Fantáziánk megengedi, hogy az egyenesre összenyomott festéket ugy képzeljük el, mintha az teljesen bele lenne préselve a számegyenesbe. Tehát a festék nem ad "vastagságot" a számegyenesnek, csupán "beszi-



29. ábra

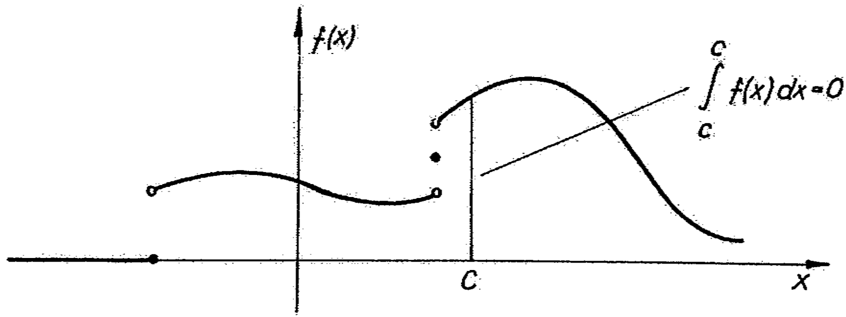
nezi". Ahova több festék jut, ott "feketébb", ahova kevesebb, ott csak "szürkébb, ahova semmi festék nem jut, ott "teljesen fehér" a számegyenes.

Ha a függvényt f-fel jelöljük, akkor a számegyenes valamely $[a,b]$ intervallumára préselődő festékmennyiség (megegyezvén az intervallum feletti és az f grafikonja alatti rész területével) $\int_a^b f(x)dx$-szel egyenlő:



30. ábra

Ha az intervallum egyetlen pontból áll (az intervallum kezdő és végpontja egybe esik), akkor ez a síkrész szakasszá degenerálódik, aminek területe 0-val egyenlő:



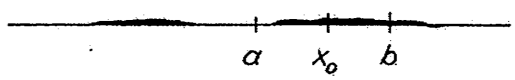
31. ábra

Tehát minden c pontra teljesül, hogy a c ponton lévő festékmennyiség 0-val egyenlő. Ez pedig azt jelenti, hogy az eloszlás "csomómentes", azaz folytonos tipusu.

Most kis kitérőt teszünk, hogy megmagyarázhassuk, miért hivják az f függvényt az egyenesen létrejött eloszlás sürüségfüggvényének.

Térbeli inhomogén tömegeloszlás leirása céljából a következőt szokták tenni. Kiszemelnek egy pontot a térben. A pont körül egy kis térrészt tekintenek. A térrészben lévő tömegmennyiséget eloszják a térrész térfogatával. A kapott hányados a térrészbeli átlagsürüséget adja meg. Ezek után a térrészt "rázsugoritják" a kiszemelt pontra. Ha a zsugoritás közben az átlagsürüségnek van határértéke, akkor e határértéket a kiszemelt pontbeli sürüségnek nevezik. Inhomogén tömegeloszlás esetén a sürüség a tér különböző pontjaiban különböző. A sürüségnek a tér pontjaitól való függése értelmezi a tömegeloszlás sürüségfüggvényét. Ha nem a térben, hanem a sikon vagy az egyenesen tekintünk egy tömegeloszlást, akkor a sürüségfüggvény teljesen hasonló módon definiálható, csak az átlagsürüség értelmezésekor térrész helyett sikrész, illetve intervallum tekintendő, és térfogat helyett területtel illetve hosszusággal kell osztani.

Ezen előkészités után tekintsünk a számegyenesen egy x_0 pontot és körülötte egy $[a,b]$ intervallumot:



32/a ábra

Az intervallumon lévő festékmennyiség $\int_a^b f(x)\,dx$ -szel egyenlő, igy az $[a,b]$ intervallumban az átlagsürüség $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ vagyis az f függvénynek az $[a,b]$ intervallumon vett integrálközepe. Ismeretes, hogy ha f folytonos az x_0 pontban, és az $[a,b]$ intervallum ráhuzódik x_0-ra, akkor az $[a,b]$ intervallumon vett integrálközép az integrandus x_0 helyen vett helyettesitési értékéhez, $f(x_0)$-hoz tart:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow f(x_0), \quad \text{ha} \quad a < x_0 < b \quad \text{és} \quad a,b \to x_0 .$$

Tehát a festékeloszlás x_0-beli sürüsége $f(x_0)$. Ezért jogos, hogy f-t az eloszlás sürüségfüggvényének nevezzük.

Vegyük észre, hogy ha az x_0 pont körüli $[a,b]$ intervallum picike, akkor az $[a,b]$ intervallumon lévő $\int_a^b f(x)\,dx$ festékmennyiség közelitőleg $f(x_0)\cdot(b-a)$-val egyenlő. Tehát egy picike intervallumon közelitőleg annyi festék van, amennyi az intervallum hossza szorozva a sürüségfüggvénynek az intervallumban vett értékével.

Az eloszlást legjobb a sürüségfüggvény grafikonjával szemléltetni. A grafikon a festék összenyomás előtti alakját mutatja.

Egy ilyen eloszlás nyilván akkor valószinüségeloszlás, ha a sürüségfüggvény grafikonja alatti terület, tehát a sürüségfüggvény integrálja $(-\infty)$-től $(+\infty)$-ig 1-gyel egyenlő:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 .$$

A leirt konstrukcióval megadható eloszlásokat sürüségfüggvénnyel rendelkező folytonos eloszlásoknak nevezzük.

Nem minden folytonos eloszlás rendelkezik sürüségfüggvénnyel. Ilyen eloszlásra a VII. fejezet 1. pontjának végén mutatunk majd példát. Mivel az ilyen eloszlások gyakorlati szempontból nem fontosak, nem foglalkozunk velük.

A későbbiekben - hacsak ellenkezőjét nem hangsulyozzuk - sürüségfüggvénnyel rendelkező folytonos eloszlásra gondolunk, amikor - röviden - folytonos eloszlásról beszélünk.

6. Kevert eloszlások

A kevert eloszlásokat ugy adjuk meg, hogy külön-külön megadjuk diszkrét és folytonos részüket.

Egy kevert eloszlás nyilván akkor valószinüségeloszlás, ha diszkrét része összpálcikahosszának és folytonos része sürüségfüggvénye alatti területének összege 1-gyel egyenlő.

7. Valószínűségi változó eloszlása

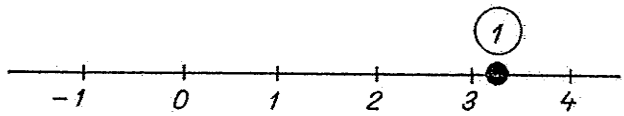
Ha ξ valószinüségi változó, akkor értéke valamilyen véletlen jelenségtől függő szám. Ezért ha B részhalmaza a számegyenesnek (például valamilyen intervallum, vagy akár egyetlen pontból álló halmaz), akkor ξ értéke a véletlen jelenség lezajlása során vagy eleme B-nek: $\xi \in B$ (olvasd: kszi eleme B-nek), vagy nem: $\xi \notin B$ (olvasd: kszi nem eleme B-nek). A $\xi \in B$ kijelentés tehát egy esemény, aminek valószinüségéről van értelme beszélni.

Korábbi jelöléseinknek megfelelően a $\xi \in B$ esemény valószinüségét igy jelöljük: $P(\xi \in B)$. Ha a B halmaz intervallum: $B = [a,b]$, akkor igy is jelölhetjük: $P(a \leq \xi \leq b)$. Ha B egyetlen pontból áll: $B = \{x\}$, akkor $P(\xi = x)$ -t is irhatunk, stb.

Kenjük be a számegyenest festékkel ugy, hogy a számegyenes minden B részhalmazára annyi festék jusson, amennyi a $\xi \in B$ esemény valószinüsége. Ezt az eloszlást a valószinüségi változó eloszlásának nevezzük. Ha az eloszlás folytonos, akkor az eloszlás sürüségfüggvényét a valószinüségi változó sürüségfüggvényének is nevezzük.

A valószinüségi változókat eloszlásuk segitségével épitjük be matematikai modellünkbe. Az eloszlás kieszelése logikai, matematikai eszközökkel lehetséges (lásd például a következő fejezetet). A XIV. fejezet 4. pontjában pedig azt fogjuk vizsgálni, hogy egy valószinüségi változó eloszlása hogyan közelithető a valószinüségi változóra végzett kisérleti eredményekből.

Megjegyezzük, hogy a valószinüségi változók közé sorolhatjuk a véletlentől nem függő konstansokat is. Ha például ξ értéke mindig 3,2, akkor ξ eloszlása az az eloszlás, melynél - egyetlen festékcsomó formájában - a 3,2 pontra van kenve az egységnyi festékmennyiség:

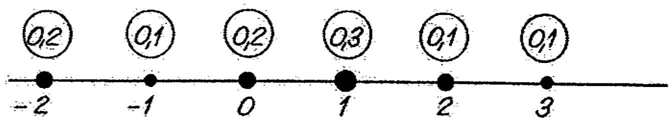


32/b ábra

Az ilyen eloszlásokat a szóban forgó pontra koncentrált <u>elfajult eloszlásoknak</u> nevezzük.

Az alábbi 3 példán keresztül összefoglaljuk a valószinüségi változó eloszlásával kapcsolatban elmondottakat:

<u>1. példa:</u> Ha ξ eloszlása az alábbi diszkrét eloszlás



33. ábra

akkor

$$P(\xi \in [0,4;\ 2,5]) = 0,3 + 0,1 = 0,4\ ,$$

$$P(\xi \in [1\ ;\ 2]) = 0,3 + 0,1 = 0,4\ ,$$

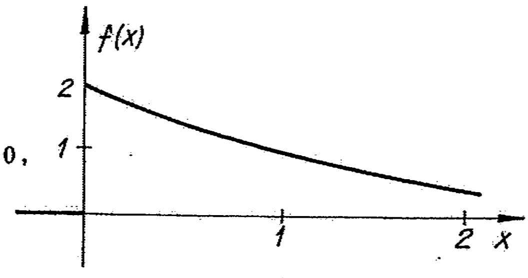
$$P(\xi \geqslant 0) = 0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,1 = 0,7\ ,$$

$$P(\xi \in [-1,5;\ 2] \mid \xi \geqslant 0) = \frac{P(0 \leqslant \xi \leqslant 2)}{P(\xi \geqslant 0)} = \frac{0,2+0,3+0,1}{0,7} = \frac{6}{7}\ ,$$

$$P(\xi = -1) = 0,1. \blacksquare$$

<u>2. példa:</u> Ha ξ sürüségfüggvénye az alábbi függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ha } x < 0\ , \\ 2e^{-2x}\ , & \text{ha } x > 0\ , \end{cases}$$



34. ábra

akkor

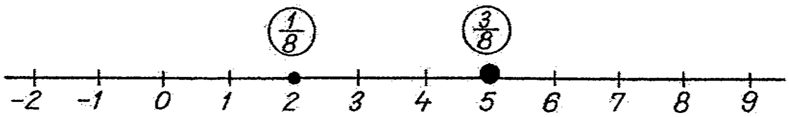
$$P(-1 \leqslant \xi \leqslant 10) = \int_{-1}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} 2e^{-2x}\,dx = 1-e^{-20}\ ,$$

$$P(\xi \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} 2e^{-2x}\,dx = 1-e^{-4},$$

$$P(\xi \leq 2 \mid -1 \leq \xi \leq 10) = \frac{P(-1 \leq \xi \leq 2)}{P(-1 \leq \xi \leq 10)} = \frac{1-e^{-4}}{1-e^{-20}},$$

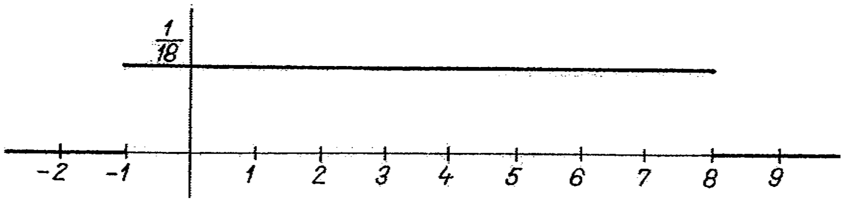
$$P(\xi = 3) = \int_{3}^{3} f(x)\,dx = 0. \blacksquare$$

3. példa: Legyen ξ eloszlása az Eloszlások tipusai c. pontban szereplő kevert eloszlás. Ennek diszkrét része:



35. ábra

Folytonos részének sürüségfüggvénye pedig



36. ábra

Ekkor

$$P(\xi \leq 3{,}5) = \frac{1}{8} + \int_{-1}^{3{,}5} \frac{1}{18}\,dx = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$P(\xi = 5) = \frac{3}{8},$$

$$P(\xi = 6) = 0. \blacksquare$$

Vegyük észre a következőket.

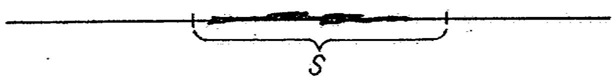
Ha egy valószinüségi változó diszkrét vagy kevert eloszlásu, akkor van olyan c szám, amelyre annak az eseménynak a valószinüsége, hogy a valószinüségi változó ezt a kiszemelt c értéket veszi fel, pozitiv.

Ha pedig egy valószinüségi változó folytonos eloszlásu, akkor akármilyen c szám esetén annak az eseménynek a valószinüsége, hogy a valószinüségi változó ezt a kiszemelt c értéket veszi fel 0-val egyenlő.

Megjegyzés: Ha a számegyenesen felvett B halmaz nem Borel-halmaz, akkor - mint már korábban említettük - matematikai modellünk nem képes minden eloszlásra megmondani, hogy az eloszlás szerint mennyi festék van a B-n. Ezért ilyenkor a modellben a $\xi \in B$ esemény valószinüségéről nem beszélhetünk. Mivel nekünk csak Borel-halmazokkal lesz dolgunk, ilyen kellemetlenséggel nem fogunk találkozni.

8. Valószínűségi változó lehetséges értékei

Ha S részhalmaza a számegyenesnek, akkor előfordulhat, hogy a vizsgált eloszlás az egész festékmennyiséget S-re keni, a számegyenes S-en kivüli részére nem kerül festék:

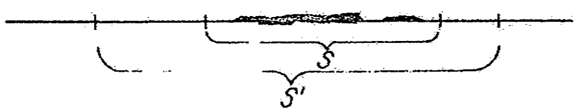


37. ábra

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az eloszlás S-re koncentrálódik. Például:

1. Az előző pont 1. példájában szereplő eloszlás, a $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ számokból álló 6 elemü halmazra koncentrálódik.
2. Az előző pont 2. példájában szereplő eloszlás a $[0, \infty)$ intervallumra koncentrálódik.

Világos, hogy ha egy eloszlás S-re koncentrálódik, és S részhalmaza S'-nek, akkor az eloszlás egyben S'-re koncentráltnak is mondható:



38. ábra

Ha egy ξ valószinüségi változó eloszlása S-re koncentrálódik, akkor ez annyit jelent, hogy a $\xi \in S$ esemény valószinüsége 1, tehát majdnem biztos, hogy a ξ csak S-beli értékeket vesz fel. Ezt fejezzük ki azzal a szóhasználattal, hogy a ξ lehetséges értékei S-be esnek.

Sok esetben a bennünket érdeklő valószinüségi változóhoz könnyü találni egy olyan - lehetőleg minél szükebb - halmazt, amibe a valószinüségi változó lehetséges értékei beleesnek. Ilyenkor a vizsgált valószinüségi változó eloszlásáról állithatjuk, hogy a talált halmazra koncentrálódik. Ezért nem kell a fejünket törni, hogy a számegyenesnek a talált halmazon kivül eső részét hogyan kenjük be festékkel. Például:

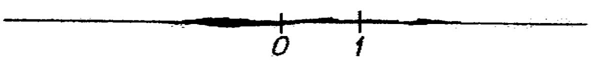
1. A ξ = "ahányadik dobásra végre 6-ost kapunk a dobókockán" valószinüségi változó értéke csak pozitiv egész szám lehet, vagyis ξ eloszlása a természetes számok halmazára koncentrálódik.

2. Az η = "ahány percet várni kell a villamosra" valószinüségi változó értéke pedig nem lehet negativ, igy η eloszlása a $[0,\infty)$ intervallumra koncentrálódik.

Vegyük észre, hogy egy eloszlás akkor és csak akkor diszkrét, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazra koncentrálódik. Tehát egy valószinüségi változó akkor és csak akkor diszkrét eloszlásu, ha lehetséges értékei véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazba foglalhatók.

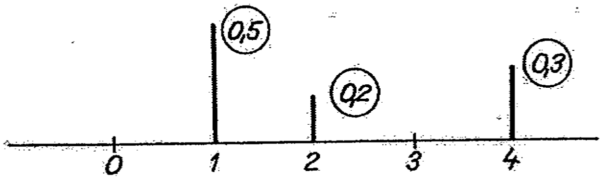
9. Eloszlásfüggvény

Vegyünk egy valószinüségeloszlást, azaz kenjünk szét egységnyi festékmennyiséget a számegyenesen:



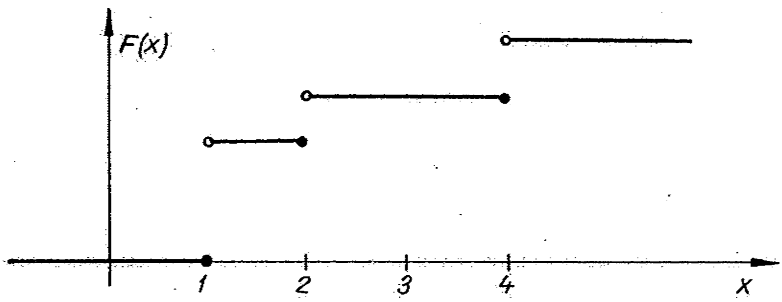
39. ábra

Az eloszláshoz egy függvényt rendelhetünk a következő utasitással: Az F függvény értéke az x helyen, amit F(x)-szel jelölünk, legyen annyi, amennyi festék a $(-\infty, x)$ intervallumon van. Ezt a függvényt a valószinüségeloszlás eloszlásfüggvényének nevezzük. Például: az itt látható



40. ábra

diszkrét eloszlás eloszlásfüggvényének értéke néhány konkrét helyen: $F(-0,4) = 0$, $F(1,5) = 0,5$, $F(2) = 0,5$, $F(2,1) = 0,7$, $F(7) = 1$.
Az eloszlásfüggvény grafikonja pedig így néz ki:



41. ábra

Vegyük észre, hogy tetszőleges diszkrét eloszlás eloszlásfüggvénye olyan "lépcsős" függvény, melynek ugrásai az eloszlás pálcikáinak helyén vannak, az ugrások pedig akkorák, amilyen magasak a pálcikák.

Az f sürüségfüggvényü folytonos eloszlás szerint a $(-\infty, x)$ intervallumon lévő festék mennyisége $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$. Ezért egy folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye így fejezhető ki a sürüségfüggvénnyel:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx\ .$$

Tehát az eloszlásfüggvény a sürüségfüggvény integrálfüggvénye. Ismert, hogy az $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ összefüggésből következik, hogy F folytonos, és ahol f is folytonos, ott F differenciálható és

$$F'(x) = f(x) .$$

Tehát a sürüségfüggvény folytonossági pontjaiban az eloszlásfüggvény deriváltjaként a sürüségfüggvényt kapjuk vissza.

Minden eloszlásfüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. monoton növekedő,
2. balról folytonos,
3. $(-\infty)$-ben a határértéke 0,
4. $(+\infty)$-ben a határértéke 1.

Ezeknek a tulajdonságoknak a bizonyitására nem térünk ki. Hasznos, ha a Kedves Olvasó néhány konkrét példán ellenőrzi a fenti négy tulajdonság teljesülését. Az is igaz, hogy ha egy függvény rendelkezik ezzel a négy tulajdonsággal, akkor ez a függvény egy alkalmasan választott valószinüségeloszlás eloszlásfüggvénye. Tehát a valószinüségeloszlások kölcsönös és egyértelmü kapcsolatban állnak a fenti négy tulajdonsággal biró függvényekkel. Ezért egy valószinüségi változót nemcsak eloszlásával, hanem annak eloszlásfüggvényével is jellemezhetjük. Ezzel a lehetőséggel szoktak élni azok a valószinüségszámitás könyvek, melyek nem használnak mértékelméleti segédeszközöket, és nem épitenek az eloszlás (szemléletes vagy egzakt) fogalmára.

Egy valószinüségi változó eloszlásának eloszlásfüggvényét a valószinüségi változó eloszlásfüggvényének is nevezzük. A ξ valószinüségi változó eloszlása annyi festéket ken a $(-\infty, x)$ intervallumra, amennyi a $\xi \in (-\infty, x)$ esemény valószinüsége. $\xi \in (-\infty, x)$ annyit jelent, hogy $\xi < x$. Igy a ξ valószinüségi változó eloszlásfüggvénye az a F függvény, melyet a $F(x) = P(\xi < x)$ összefüggéssel értelmezhetünk.

Az eloszlásfüggvények a folytonos eloszlásokkal kapcsolatos számitásoknál játszanak fontosabb szerepet. A nevezetesebb eloszlásfüggvények táblázatokba vannak foglalva. A táblázat segitségével tetszőleges $a < b$ számokra kiszámolható az $a \leqslant \xi < b$ esemény valószinüsége. Ugyanis ez a valószinüség annyi, amennyi festék a ξ eloszlása szerint az $[a, b)$ intervallumon van. Ez a festékmennyiség pedig a $(-\infty, b)$ intervallumon lévő festékmennyiségnek (azaz $F(b)$-nek) és a $(-\infty, a)$ intervallumon lévő festékmennyiségnek (azaz $F(a)$-nak) a különbsége. Tehát

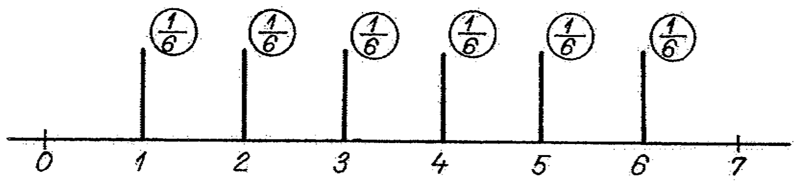
$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a) .$$

Folytonos eloszlás esetén mindegy, hogy itt $<$ vagy $\leqslant$ jeleket irunk, hiszen $P(\xi = a) = P(\xi = b) = 0$.

V. NEVEZETES ELOSZLÁSOK

1. Diszkrét egyenletes eloszlás

Vegyünk egy szabályos dobókockát, és dobjuk fel. Legyen ξ = a dobott szám értéke. A kocka szimmetriája miatt minden oldal egyforma valószinüséggel kerülhet felülre, igy ξ eloszlása:



42. ábra

Általánosabban, ha egy valószinüségi változó véges sok – mondjuk n – értéket vehet fel, és ezeket egyforma valószinüséggel veszi fel, akkor eloszlása mindegyik lehetséges értékhez $\frac{1}{n}$ nagyságu pálcikát rendel. Az ilyen eloszlásokat diszkrét egyenletes eloszlásoknak nevezzük.

2. Binomális eloszlás

Vegyünk 5 darab olyan pénzérmét, ami hamis. Hamis olyan értelemben, hogy ha feldobjuk, akkor $\frac{4}{7}$ valószinüséggel esik "fej"-re és csak $\frac{3}{7}$ valószinüséggel "irás"-ra. Ha feldobjuk mind az 5 értmét, akkor véletlentől függ, hogy közülük hány esik fejre. A ξ valószinüségi változó értéke legyen annyi, ahány érme "fejre" esik. Ki fogjuk eszelni a ξ eloszlását.

ξ a 0,1,2,3,4,5 értékeket veheti fel. Tehát ξ eloszlása diszkrét. A pálcikák helye a 0-tól 5-ig terjedő egész számok. Mekkora pálcika kerül például a 2 pontra? Vagyis mi annak a valószinüsége, hogy az 5 érem között 2 fej és 3 irás lesz? Ezt most ki fogjuk számolni.

Képzeljük el, hogy az érméket megszámozzuk az "írás" oldalukon így:

$$\textcircled{1},\quad \textcircled{2},\quad \textcircled{3},\quad \textcircled{4},\quad \textcircled{5}.$$

A "fej" oldalukon is megszámozzuk őket ugyanúgy, de még egy keresztet is teszünk:

$$\xcancel{\textcircled{1}},\quad \xcancel{\textcircled{2}},\quad \xcancel{\textcircled{3}},\quad \xcancel{\textcircled{4}},\quad \xcancel{\textcircled{5}}.$$

Most pedig felsoroljuk az összes olyan dobás kombinációt, melyben 2 fej és 3 írás van:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\xcancel{\textcircled{1}} & \xcancel{\textcircled{2}} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \quad & \textcircled{1} & \xcancel{\textcircled{2}} & \textcircled{3} & \xcancel{\textcircled{4}} & \textcircled{5} \\
\xcancel{\textcircled{1}} & \textcircled{2} & \xcancel{\textcircled{3}} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \quad & \textcircled{1} & \xcancel{\textcircled{2}} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \xcancel{\textcircled{5}} \\
\xcancel{\textcircled{1}} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \xcancel{\textcircled{4}} & \textcircled{5} & \quad & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \xcancel{\textcircled{3}} & \xcancel{\textcircled{4}} & \textcircled{5} \\
\xcancel{\textcircled{1}} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \xcancel{\textcircled{5}} & \quad & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \xcancel{\textcircled{3}} & \textcircled{4} & \xcancel{\textcircled{5}} \\
\textcircled{1} & \xcancel{\textcircled{2}} & \xcancel{\textcircled{3}} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \quad & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \xcancel{\textcircled{4}} & \xcancel{\textcircled{5}}
\end{array}$$

A felsorolt dobás kombinációk száma annyi, ahányféleképpen a 2 keresztet el lehet helyezni az 5 lehetséges helyre, azaz $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$

Annak a valószínűsége, hogy az első érme fejre esik, $\frac{4}{7}$.

Ezt a tényt így juttatjuk kifejezésre: $P(\xcancel{\textcircled{1}}) = \frac{4}{7}$.

Érthető, hogy mit akarunk kifejezni az alábbiakkal:

$$P(\xcancel{\textcircled{1}}) = \frac{4}{7},\quad P(\xcancel{\textcircled{2}}) = \frac{4}{7},\quad P(\textcircled{3}) = \frac{3}{7},\quad P(\textcircled{4}) = \frac{3}{7},\quad P(\textcircled{5}) = \frac{3}{7}.$$

Az érmék egymástól függetlenül esnek le, ezért

$$P(\xcancel{\textcircled{1}}\ \xcancel{\textcircled{2}}\ \textcircled{3}\ \textcircled{4}\ \textcircled{5}) = \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3.$$

Teljesen hasonló gondolatmenettel adódik, hogy

$$P(\xcancel{\textcircled{1}}\ \textcircled{2}\ \xcancel{\textcircled{3}}\ \textcircled{4}\ \textcircled{5}) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P(\textcircled{1}\ \textcircled{2}\ \textcircled{3}\ \xcancel{\textcircled{4}}\ \xcancel{\textcircled{5}}) = \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3.$$

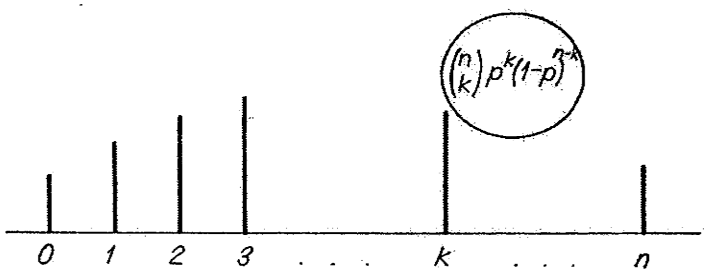
Az $\cancel{1}\,\cancel{2}\,3\,4\,5$, $\cancel{1}\,2\,\cancel{3}\,4\,5, \ldots, 1\,2\,3\,\cancel{4}\,\cancel{5}$ események egymást kizáró események, számuk pedig annyi, ahányféleképpen az 5 érme közül kettőt kiválaszthatunk, azaz $\binom{5}{2}$, és nyilván egyesitésük jelenti azt az eseményt, hogy az 5 érme között 2 fej és 3 irás van. Ezért P(az 5 érme között 2 fej és 3 irás van) = $P(\cancel{1}\,\cancel{2}\,3\,4\,5) + P(\cancel{1}\,2\,\cancel{3}\,4\,5) + \ldots + P(1\,2\,3\,\cancel{4}\,\cancel{5}) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3$.

Tehát kiszámoltuk a célul kitüzött pálcika nagyságát.

A gondolatmenetből kiolvasható, hogy ha n darab érme van, egy érmén a fej valószinüsége p, és feldobjuk az érméket, melyek egymástól függetlenül esnek "fej"-re vagy "irás"-ra, akkor annak a valószinüségi változónak az eloszlása, mely azt mutatja, hogy hány érme esik "fejre", olyan diszkrét eloszlás, melynél a pálcikák helye a 0-tól n-ig terjedő egész számok, a k számhoz pedig

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

nagyságu pálcika tartozik, ($k = 0, 1, \ldots, n$). Ennek az eloszlásnak a neve: n-ed rendü p paraméterü binomiális eloszlás.



43. ábra

Persze itt nem a pénzdobáláson van a lényeg. Érezhető, hogy ha n darab p valószinüségü, független eseménnyel kapcsolatban azt vizsgálom, hogy ezek közül az események közül hány következik be, akkor ez a valószinüségi változó n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlást követ.

Például ha n ember egymástól függetlenül céltáblára lő, és egyforma képességüek, vagyis mindegyik – mondjuk – p valószinüséggel talál, akkor a találatok száma, mint valószinüségi változó, n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlásu.

Az eloszlás onnan kapta a nevét, hogy tagjait megkaphatjuk, ha a p+(1-p) kéttagu kifejezés (latinul: binom) n-ik hatványát összeg alakjában kifejtjük:

$$\left(p + (1-p)\right)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Ebből az azonosságból látszik az is, hogy a binomiális eloszlás valószínűségeloszlás, hiszen $\left(p + (1-p)\right)^n = 1^n = 1$.

3. Poisson-eloszlás

(ejtsd: poászon)

Az alábbi határértéktétel nagyon fontos következményekkel bir.

Tétel: Tetszőleges pozitiv λ -ra és nem negativ, egész k-ra

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to o \\ np \to \lambda}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

Bizonyitás: Ismert, hogy $\lim\limits_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{p \to o} (1-p)^{\frac{1}{p}} = e^{-1}$.

Ennek felhasználásával:

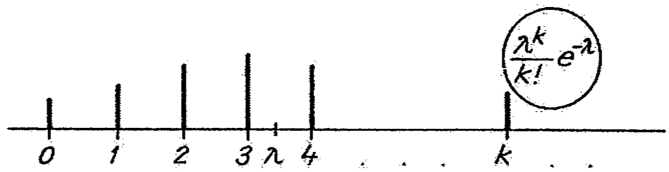
$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^n \frac{1}{(1-p)^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\to 1} \ldots \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{(np)^k}_{\to \lambda^k} \underbrace{\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{np}}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1-p)^k}}_{\to 1} \to \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k e^{-\lambda} . \blacksquare$$

A tétel azt fejezi ki, hogy nagy n és kis p esetén az n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlás k-ik tagja, $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ jól közelithető $\frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$ -vel, ahol $k = 0,1,\dots, n$. Ennek kapcsán vezetjük be a Poisson-eloszlást.

<u>λ paraméterü Poisson-eloszlásnak</u> nevezzük azt a diszkrét eloszlást, melynél a pálcikák helye a nem negativ egész számok, a k-hoz tartozó pálcika nagysága pedig

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0,1,\dots).$$



44. ábra

A Poisson-eloszlás is valószinüségeloszlás, ugyanis $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$. A Poisson-eloszlás tagjait néhány λ-ra táblázatra foglaltuk. A táblázat a jegyzet végén található.

Tehát nagy n és pici p esetén az n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlás a $\lambda = np$ paraméterü Poisson-eloszlással helyettesithető. Ez pedig örvendetes dolog, mert a Poisson-eloszlás tagjait megadó képlet sokkal egyszerübb, mint a binomiális eloszlás tagjait megadó képlet. Lássuk ezt egy feladatban!

<u>1. feladat:</u> Egy hivatalban 600 telefonkészülék van, melyekről tegyük fel, hogy egymástól függetlenül $\frac{1}{200}$ valószinüséggel romlanak el egy nap alatt. Mi a valószinüsége, hogy egy nap alatt pontosan 5 készülék romlik el?

<u>Megoldás:</u> Az egy nap alatt elromló készülékek száma 600-ad rendü $\frac{1}{200}$ paraméterü binomiális eloszlásu valószinüségi változó. Tekintve, hogy a 600 már "nagy", az $\frac{1}{200}$ pedig "pici", a binomiális eloszlás helyett Poisson-eloszlást veszünk $\lambda = 600 \cdot \frac{1}{200} = 3$ paraméterrel.

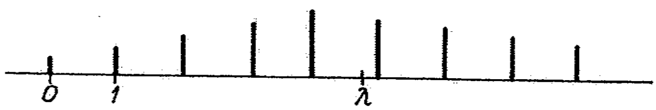
Így a keresett valószínűség a 3 paraméterű Poisson-eloszlásból olvasható ki: P (pontosan öt készülék romlik el) $= \frac{3^5}{5!} e^{-3} = 0{,}1008 \approx 0{,}1.$ ■

Megjegyzés: Ha binomiális eloszlással számoltunk volna, akkor a kérdezett valószínűségre a $\binom{600}{5}\left(\frac{1}{200}\right)^5\left(1-\frac{1}{200}\right)^{595} = 0{,}1009$ értéket kaptuk volna.

Most megvizsgáljuk, hogy a λ paraméterű Poisson-eloszlás pálcikái közül melyik a legnagyobb. Legyen $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k=0,1,\dots)$. Annak eldöntése céljából, hogy p_i nagyobb-e mint p_{i-1}, megvizsgáljuk a hányadosukat.

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{i},$$

hiszen $e^{-\lambda}$-val és $(i-1)!$-sal egyszerűsíteni lehetett. Így láthatjuk, hogy ha i kisebb mint λ, akkor p_i nagyobb p_{i-1}-nél. Ha pedig i nagyobb mint λ, akkor p_i kisebb p_{i-1}-nél. Ha pedig λ egész szám, és így i egyenlő is tud lenni λ-val, akkor $p_{\lambda-1} = p_\lambda$. Tehát ha λ nem egész szám, akkor a λ előtt nőnek a pálcikák, a λ után pedig egyre kisebbek lesznek:



45. ábra

A legmagasabb pálcika a λ-t közvetlenül megelőző egész számhoz tartozik. Ha pedig λ egész szám, akkor a helyzet csak annyiban változik, hogy a λ-hoz és a λ-1-hez tartozó pálcikák egyforma magasak.

Az alábbi feladatból kitűnik, hogy a Poisson-eloszlással való közelítés olyankor is célra vezet, ha a binomiális eloszlás rendjét és paraméterét nem ismerjük, csak azt tudjuk valahonnan, hogy a rend nagy, a paraméter pedig pici.

2. feladat: A tó partján álltam, és néztem, ahogy a tóban a sok apró halacska egymással mit se törődve össze-vissza uszkált. Egy halász éppen hálóját készült kiemelni, amikor nagyképüen így szólt hozzám: "Ha eltalálod, hány hal lesz a hálóban, kapsz egy ötszázast." Én csak annyit kérdeztem a halásztól, hogy ugy általában száz eset közül hányszor szokott üres lenni a hálója. Ő azt felelte, hogy körülbelül hatszor. Erre én egy kicsit gondolkodtam, és két halra tippeltem. Miért?

Megoldás: Mivel meg akartam nyerni az ötszáz forintot, így gondolkodtam: Nyilván annyi halra tippel az ember, ahány hal kifogása a legvalószinübb. Ehhez azt kellene tudni, hogy a hálóban lévő halak száma milyen eloszlásu valószinüségi változó, és hogy ennek az eloszlásnak melyik tagja a legnagyobb. A halak egymástól függetlenül kerülnek vagy nem kerülnek a hálóba, hiszen egymással mit se törődve uszkálnak. Ezért a hálóban lévő halak száma olyan binomiális eloszlásu valószinüségi változó, melynek sem rendjét sem paraméterét nem ismerem. (A rend a tóban lévő halak száma, a paraméter pedig - legalábbis nagyságrendileg - a háló karimája területének és a tó területének hányadosa.) Viszont a binomiális eloszlást közelíthetem Poisson-eloszlással, hiszen a rend nagy (sok hal van), a paraméter pedig pici (a háló karimája által meghatározott terület nagyon pici a tó területéhez képest). Milyen λ-t vegyek a Poisson-eloszlásban? Száz esetből hatszor üres a háló. Ezért 0,06-nak veszem a 0 darab hal valószinüségét, vagyis

$$0,06 = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} .$$

Innen pedig λ már meghatározható: $\lambda = \ln \frac{100}{6} = 2,8$.

A Poisson-eloszlás maximális tagja, mint azt meghatároztuk, a paramétert megelőző tag. Ezért a 2 hal a legvalószinübb. ■

Később látni fogjuk, hogy a λ paraméterü Poisson-eloszlás várható értéke λ. Mivel a várható érték a gyakorlatban jól kezelhető mennyiség, sok feladatnál ez lehetőséget ad a Poisson-eloszlás paraméterének kiészelésére. (Lásd a X. fejezet 4. és 5. pontját.)

Összefoglalva az eddigieket: ha sok, pici valószinüségü, független esemény esetén azt vizsgálom, hogy közülük hány következik be, akkor ez a valószinüségi változó Poisson-eloszlásunak tekinthető.

Ilyen valószinüségi változók például:

1. Ahány autó áthalad az Erzsébet-hidon délelőtt 10 és 11 óra között. (Annak a valószinüsége, hogy egy kiszemelt autó - pl. a sógorom Zsigulija - a vizsgált idő alatt átmenjen, kicsi. Sok autó cikázik a városban egymástól többé-kevésbé függetlenül.)

2. Ahány telefonhívás érkezik egy hivatalba 10 perc alatt. (Sokan hívhatnak, egymástól függetlenül hívnak, kicsi a valószínűsége, hogy X.Y. éppen a vizsgált 10 perces időintervallumban telefonáljon.)

3. Ahány meteor becsapódik Magyarországra egy évben. (Sok meteor kóvályog az űrben, kicsi a valószínűsége, hogy egy konkrét meteor a vizsgált évben Magyarországra pottyanjon, és a "meteorok sem beszélnek össze".)

4. Geometriai eloszlás

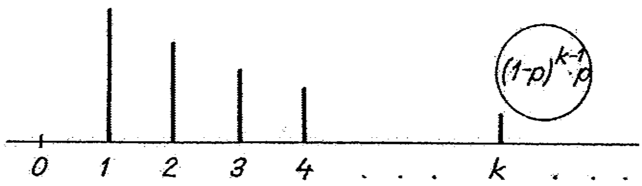
Ha egy p valószínűségű eseményre független kísérletsorozatot végzünk (például egymás után feldobjuk a dobókockát, és nézzük, hogy hatost dobunk-e vagy nem), és vizsgáljuk, hogy az esemény hányadik kísérletnél következik be először (hányadik dobásra dobunk először 6-ost), akkor erre a ξ valószínűségi változóra nyilván fennáll, hogy

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad (k=1,2,\dots).$$

Ugyanis ahhoz, hogy a k-ik kísérletre következzen be elsőzörre az esemény, az kell, hogy az első k-1 kísérletnél ne következzen be, a k-ikra pedig bekövetkezzen. Ennek valószínűsége pedig a függetlenség miatt a megfelelő valószínűségek szorzata: $(1-p)(1-p)\dots(1-p)\cdot p = (1-p)^{k-1} \cdot p$.

Ennek a problémának kapcsán jutunk a geometriai eloszláshoz: <u>p paraméterű geometriai eloszlásnak</u> nevezzük azt a diszkrét eloszlást, melynél a pálcikák helye a pozitív egész számok, a k-hoz tartozó pálcika nagysága pedig

$$(1-p)^{k-1} \cdot p \qquad (k=1,2,\dots).$$



46. ábra

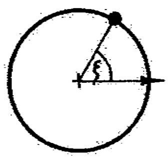
Az eloszlást azért hívják geometriai eloszlásnak, mert a pálcikák nagysága mértani sorozatot alkot, és a mértani sorozatokat geometriai sorozatoknak is szokták nevezni.

A $\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$ összefüggés mutatja, hogy a geometriai eloszlás valószinüségeloszlás.

Összefoglalva a mondottakat: ha egy p valószinüségü eseményre független kisérletsorozatot végzünk, és azt vizsgáljuk, hogy hányadik kisérletnél következik be először az esemény, akkor ez a valószinüségi változó p paraméterü geometriai eloszlást követ.

5. Egyenletes eloszlás

Képzeljünk el egy vizszintes helyzetü, kör alaku pályát. Jelöljünk ki rajta egy pontot, és inditsunk el a pályán egy golyót. A golyó valahol megáll. Véletlentől függ, hogy hol. Jelölje ξ annak a szögnek a radiánban vett értékét, amit a kijelölt pont, a kör középpontja és a golyó megállási helyzete kijelöl:

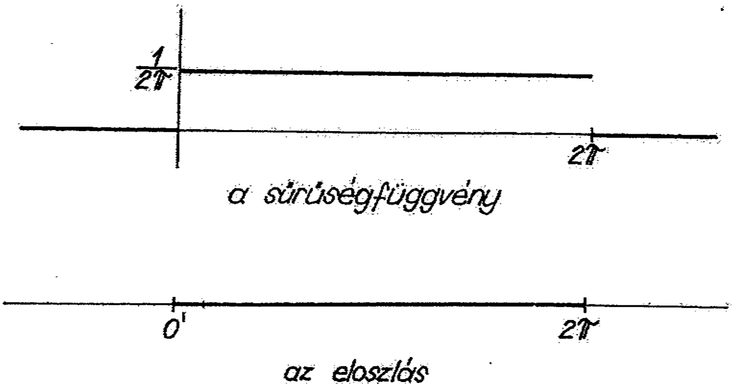


47. ábra

A golyó nyilván akárhol megállhat, igy ξ értékére teljesül, hogy $0 \leq \xi \leq 2\pi$.

A golyó "egyformán szereti" a kör minden részét, ezért ξ eloszlása egyenletes, a festék egyenletesen van szétkenve a $[0,2\pi]$ intervallumon.

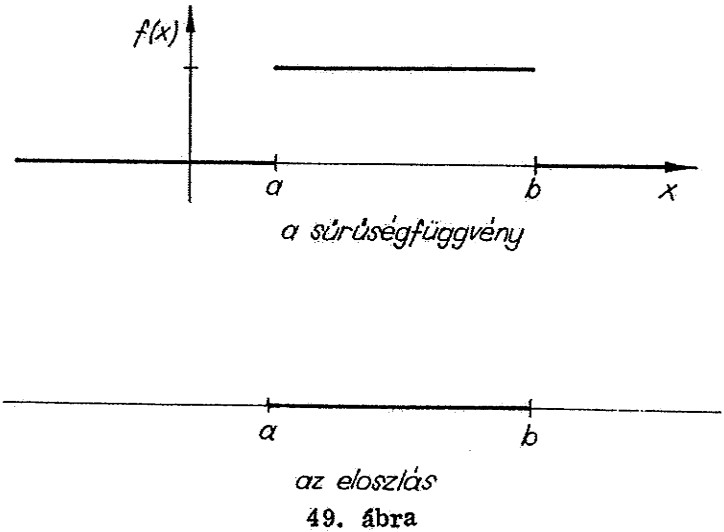
Ez azt jelenti, hogy az eloszlás folytonos, a sürüségfüggvény 0-val egyenlő a $[0,2\pi]$ intervallumon kivül, és értéke állandó a $[0,2\pi]$ intervallumon. Ez az érték pedig csakis $\frac{1}{2\pi}$ lehet, hiszen a sürüségfüggvény grafikonja alatti összterületnek 1-nek kell lenni:



48. ábra

Általánosabban: *az $[a,b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlás*nak nevezzük azt a folytonos eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye 0-val egyenlő az $[a,b]$ intervallumon kívül, és $\frac{1}{b-a}$ -val egyenlő az $[a,b]$--ben:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a,b], \\ 0, & \text{ha } x \notin [a,b]. \end{cases}$$



49. ábra

6. Exponenciális eloszlás

A radioaktiv részecskék előbb-utóbb elbomlanak. Hogy mikor, az véletlentől függ: egy radioaktiv részecske élettartama valószinüségi változó. Ki fogjuk most eszelni, hogy milyen eloszlásu.

Gondolatban végezzük el a következő kisérletet: Vegyünk n darab radioaktiv részecskét. n_x-szel, n_y-nal illetve n_{x+y}-nal jelöljük azon részecskék számát, melyek tulélik, az x,y illetve $x+y$ időtartamot. A tapasztalat szerint általában teljesül, hogy

$$\frac{n_{x+y}}{n_x} \approx \frac{n_y}{n} .$$

Tehát ha van n db részecském, és azt nézem, hogy ezek hányad része fog legalább y időt élni, akkor ez az arányszám nem függ attól, hogy " friss " vagy már x időt leélt részecskéket vettem-e. Vagyis a részecskék összességükben, "nem érzik meg az x idő elteltét". A radioaktiv részecskék ilyen értelemben "örökifju" tulajdonságuak. Az "örökifju" jelzőt nem szabad összetéveszteni az "örökéletü" jelzővel! Szó sincs olyasmiről, hogy a radioaktiv részecskék a végtelenségig élnének. Az örökifju tulajdonság csupán csak annyit akar jelenteni, hogy a részecskék multja nem szól bele a jövőjükbe. Amig élnek, mindig olyanok, mintha éppen akkor születtek volna.

A matematika nyelvére leforditjuk az $\frac{n_{x+y}}{n_x} \approx \frac{n_y}{n}$ törvényszerüséget. Ha a ξ valószinüségi változó egy radioaktiv részecske élettartamát jelöli, akkor az $\frac{n_y}{n}$ relativ gyakoriság a $\xi \geqslant y$ esemény valószinüségének felel meg:

$$\frac{n_y}{n} \approx P(\xi \geqslant y) .$$

Az $\frac{n_{x+y}}{n_x}$ hányados pedig a $\xi \geqslant x + y$ eseménynek a $\xi \geqslant x$ eseményre vonatkozó feltételes valószinüségének felel meg:

$$\frac{n_{x+y}}{n_x} \approx P(\xi \geqslant x + y \mid \xi \geqslant x).$$

Vagyis matematikai modellünkben a ξ valószinüségi változó eloszlását olyannak kell tekinteni, melyre fennáll, hogy

$$P(\xi \geqslant x+y \mid \xi \geqslant x) = P(\xi \geqslant y) \qquad (x, y > o).$$

Világos, hogy a $\xi \geqslant x+y$ esemény maga után vonja a $\xi \geqslant x$ eseményt, igy $P(\xi \geqslant x+y \mid \xi \geqslant x) = \dfrac{P(\xi \geqslant x+y)}{P(\xi \geqslant x)}$. Ennek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{P(\xi \geqslant x+y)}{P(\xi \geqslant x)} = P(\xi \geqslant y).$$

Ha $G(x)$-szel jelöljük a $\xi \geqslant x$ esemény valószinüségét:

$$G(x) = P(\xi \geqslant x) \qquad (x > o),$$

akkor a fentieket igy irhatjuk:

$$\frac{G(x+y)}{G(x)} = G(y),$$

vagyis

$$G(x+y) = G(x) \cdot G(y) .$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $G(x) = e^{c \cdot x}$ (c konstans) alaku függvények eleget tesznek ezen függvényegyenletnek:

$$e^{c \cdot (x+y)} = e^{c \cdot x} \cdot e^{c \cdot y} .$$

Bebizonyitható, hogy ha egy függvény eleget tesz a fenti függvényegyenletnek és monoton, akkor csak $e^{c \cdot x}$ alaku lehet. Márpedig a G függvény monoton csökkenő, hiszen $x_1 < x_2$ esetén a $\xi \geqslant x_2$ esemény maga után vonja a $\xi \geqslant x_1$ eseményt, és igy $G(x_2) = P(\xi \geqslant x_2) \leqslant$ $\leqslant P(\xi \geqslant x_1) = G(x_1)$. Ezért $G(x) = e^{c \cdot x}$. Itt a c konstans csak negativ lehet, mert G monoton csökkenő: $c = -\lambda$, ahol λ pozitiv (és igy c negativ). Adódik, hogy

$$G(x) = e^{-\lambda \cdot x} \qquad (x > o).$$

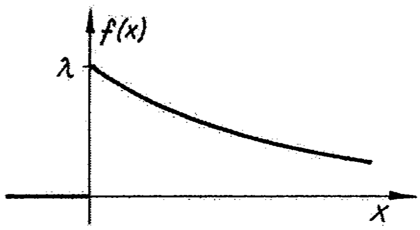
Innen pedig ξ eloszlásfüggvényére a következőt kapjuk:

$$F(x) = P(\xi < x) = 1-P(\xi \geqslant x) = 1-G(x) = 1-e^{-\lambda \cdot x} \qquad (x > o).$$

Mivel ξ nem vehet fel negatív értékeket $F(x) = 0$, ha $x \leqslant 0$. A F függvény deriváltja a

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < o, \\ \lambda e^{-\lambda \cdot x}, & \text{ha } x > o \end{cases}$$

függvény, ami integrálható függvény lévén a keresett eloszlás sűrűségfüggvénye. A sűrűségfüggvény grafikonja:



50. ábra

Ezt az eloszlást λ paraméterű exponenciális eloszlásnak nevezzük. A λ paraméter valószínűségszámítási jelentését később fogjuk tárgyalni: λ a várható érték reciproka (lásd a X. fejezet 4. pontját). Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{o}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{o}^{\infty} = 1$$ összefüggés mutatja,

hogy az exponenciális eloszlás valószínűségeloszlás.

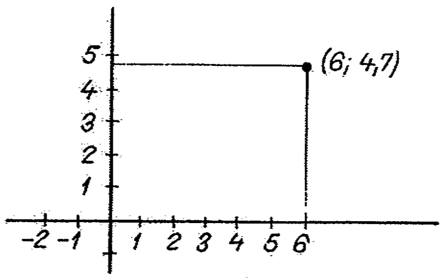
Összefoglalva: ha egy nem negatív értékeket felvevő valószínűségi változó rendelkezik az "örökifjú" tulajdonsággal, akkor exponenciális eloszlásúnak tekinthető.

VI. TÖBBDIMENZIÓS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

1. Kétdimenziós valószínűségi változó

1. Célbalövésnél minden versenyző a céltábla közepébe szeretne találni. Ez azonban a nagy igyekezet ellenére sem mindig sikerül. A kéz remegése, légáramlatok stb. miatt a találat helye véletlentől függ. Feltételezve, hogy a versenyzők annyira azért tudnak célozni, hogy legalább a céltáblát eltalálják, egy lövés helye a céltábla síkján egy véletlenszerű pontot jelöl ki.

2. Véletlentől függ, hogy egy nap alatt mennyi csapadék esik Budapesten. A lehulló csapadékmennyiség valószínűségi változó, jelöljük ξ-vel. A Debrecenben lehulló napi csapadékmennyiség is valószínűségi változó, jelöljük η-val. Egy konkrét megfigyelés esetén ξ és η értéke egy-egy valós szám, amiből egy számpár, azaz a sík egy pontja áll össze. Ha például Budapesten 6 mm, Debrecenben 4,7 mm eső esett, akkor a sík (6; 4,7) pontját kapjuk:



51. ábra

Mivel ξ és η értéke véletlentől függ, a síkbeli (ξ, η) pont is véletlentől függ.

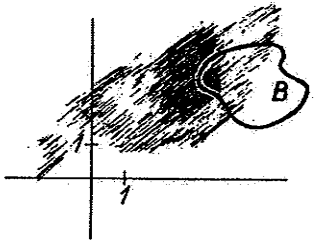
Ha valamilyen véletlen jelenséggel kapcsolatban a sík egy-egy pontja bukkan fel véletlenszerűen, akkor <u>síkbeli vagy kétdimenziós valószínűségi változóról</u> beszélünk. A két- vagy többdimenziós valószínűségi változókat <u>vektor valószínűségi változóknak</u> is szokás nevezni.

Kétdimenziós valószínűségi változót úgy értelmezhetünk, hogy egy véletlen jelenséggel kapcsolatban közvetlenül (mint a fenti 1. példában) vagy közvetve (mint a fenti 2. példában) a sík egy pontját jelöljük ki.

Ez utóbbi esetben koordináta valószinüségi változókról, a rövidség kedvéért inkább komponensekről (komponens magyarul: összetevő) és ezekből összetevődő kétdimenziós valószinüségi változóról beszélünk. Kétdimenziós valószinüségi változókat görög kisbetükkel vagy pedig komponensei segitségével jelölünk. Például:

1. ζ = a találat helye a céltábla sikján,
2. (ξ, η), ahol ξ = a napi csapadékmennyiség Budapesten,
η = " Debrecenben.

Egy kétdimenziós valószinüségi változót ugy épitünk be matematikai modellünkbe, hogy megadjuk az eloszlását, azaz szétkentünk egységnyi festékmennyiséget a sikon ugy, hogy a sik tetszőleges B részhalmaza esetén a véletlenszerü sikbeli pont B-be esésének valószinüsége annyi legyen, amennyi festék az eloszlás szerint a B-re van kenve.



52. ábra

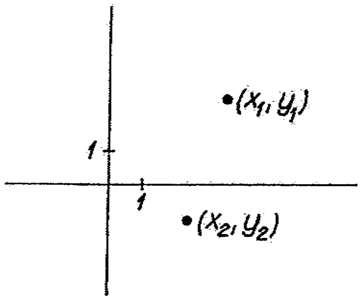
Ezt az eloszlást kétdimenziós valószinüségi változó eloszlásának nevezzük. Ha hangsulyozni akarjuk, hogy a kétdimenziós valószinüségi változó komponensei ξ és η, akkor az eloszlást ξ és η együttes eloszlásának is nevezzük.

Megjegyzés: Jelöléseinkben ξ mindig az első, η pedig a második komponenst jelöli. Amikor pedig a sik pontjait jelöljük betüpárokkal, akkor az első koordinátát x, a másodikat pedig y jelöli. Ábráinkon a vizszintes koordinátatengely felel meg ξ-nek, illetve x-nek, a függőleges tengely pedig η-nak illetve y-nak.

Most ismerkedjünk meg a sikbeli eloszlások különböző tipusaival.

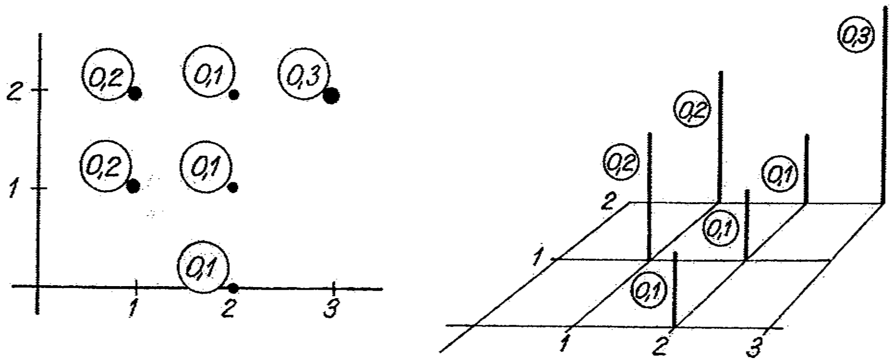
2. Diszkrét eloszlás

Egy síkbeli eloszlást diszkrétnek nevezünk, ha "csak csomókból áll a festék", azaz megadhatók olyan (x_1,y_1), (x_2,y_2),... pontok a síkban, hogy csak ezeken a pontokon van festék:



53. ábra

Korábbi jelöléseinknek megfelelően a festékcsomók helyét a síkban kijelöljük, a festékcsomók nagyságát pedig bekarikázott számokkal a kijelölt pontok mellé írjuk. A pálcikás szemléltetés most is alkalmazható, de inkább csak képzeletben, mert rajzban már kevésbé áttekinthető. Az alábbi két ábrán ugyanazt a diszkrét eloszlást adjuk meg:



54. ábra

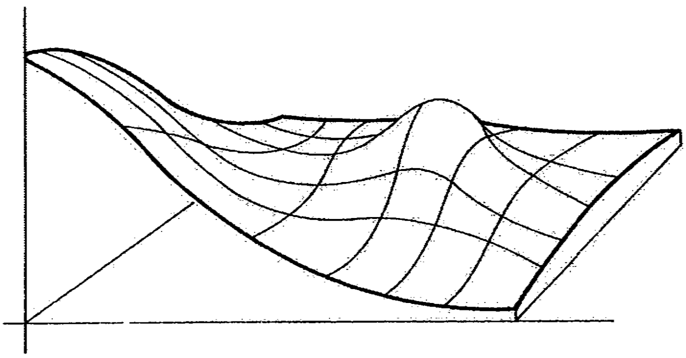
Ha egy síkbeli diszkrét eloszlást nem akarunk szemléltetni, csak adatait akarjuk rögzíteni, akkor ezeket célszerű táblázatba foglalni. Például a most szemléltetett eloszlás táblázatba foglalva így fest:

2	0,2	0,1	0,3
1	0,2	0,1	0
0	0	0,1	0
η \ ξ	1	2	3

55. ábra

3. Folytonos eloszlás

Tekintsünk egy nem negatív értékeket felvevő, kétváltozós integrálható függvényt, és ábrázoljuk grafikonját. Egy felületet kapunk a sík felett:

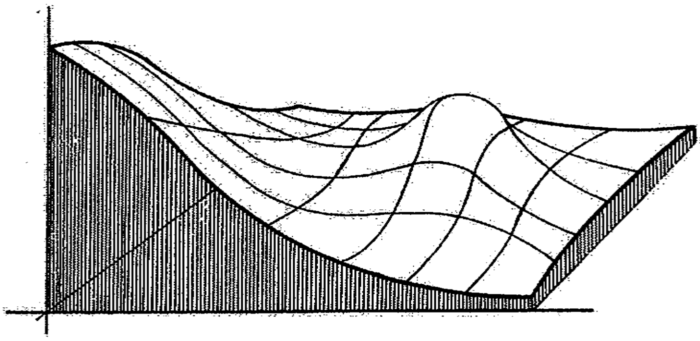


56. ábra

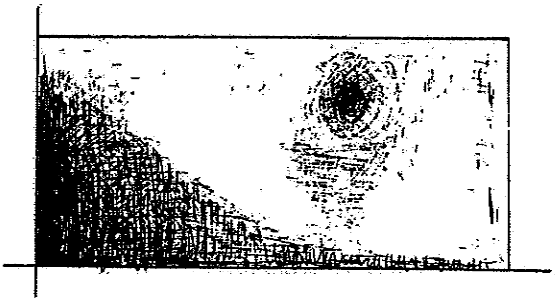
Kenjünk szét festéket a függvény és a sík közötti tartományban egyenletesen, pontosabban mondva ugy, hogy a tartomány minden részhalmazára annyi festék jusson, amennyi a részhalmaz térfogata. Ezután "jön az úthenger", és felülről összenyomja a teret ugy, hogy a festék a síkra préselődjön (l. 57. ábra, köv. old.).

Ily módon egy eloszlást kapunk a síkon. A síkra préselt festéket ugy képzeljük el, mintha teljesen bele lenne préselve a síkba. Tehát a festék nem ad vastagságot a síknak, csupán beszinezi.

Ha a függvényt h-val jelöljük, akkor a sík valamely B részhalmazára préselődő festékmennyiség $\iint_B h(x,y)\,dx\,dy$-nal egyenlő.



a festék szét van kenve a tartományban



a festéket rányomtuk a síkra

57. ábra

Ugyanis ez az integrál adja meg a B halmaz feletti és a h grafikonja alatti térrész térfogatát.

Tekintsük a sík tetszőleges (x_o, y_o) pontját. Ha a t(B) területű B halmaz " rázsugorodik " az (x_o, y_o) pontra, és h folytonos az (x_o, y_o) pontban, akkor az egydimenziós esethez hasonlóan

$$\frac{1}{t(B)} \iint_B h(x,y)\, dx\, dy \longrightarrow h(x_o, y_o).$$

Tehát ha a B halmaz picike halmaz az (x_o, y_o) pont körül, akkor a festékeloszlás B-beli átlagsürüsége közelitőleg $h(x_o, y_o)$-lal egyenlő. Ezért a h függvényt az eloszlás sürüségfüggvényének nevezzük.

Az eloszlást a sürüségfüggvény grafikonjával jól szemléltethetjük. A sürüségfüggvény a "festékréteg préselés előtti vastagságát" írja le.

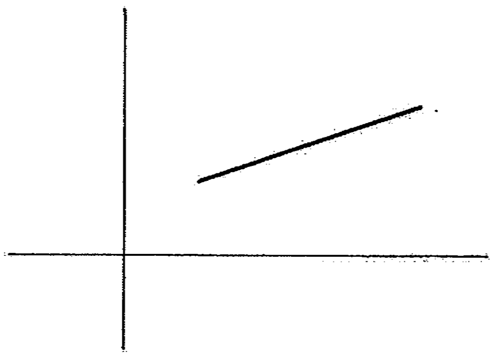
Az ily módon megadható eloszlásokat kétdimenziós vagy síkbeli folytonos eloszlásoknak nevezzük.

Egy folytonos eloszlás nyilván akkor valószinüségeloszlás, ha a sürüségfüggvény alatti tartomány térfogata, tehát a sürüségfüggvénynek az egész sikon vett integrálja 1-gyel egyenlő.

Ha valamilyen kétdimenziós valószinüségi változó eloszlása folytonos, akkor az eloszlás sürüségfüggvényét a kétdimenziós valószinüségi változó sürüségfüggvényének, avagy a komponensek együttes sürüségfüggvényének nevezzük.

Megjegyzések:

1. A sikon nagyon könnyü olyan csomómentes eloszlást mutatni, amit nem lehet valamilyen kétváltozós függvényből – mint sürüségfüggvényből – a most leirt módon előállitani. Ha a sikon egy egyenesdarabot egyenletesen kenünk be festékkel, akkor ez az eloszlás csomómentes, de nyilvánvalóan nem olyan, amilyen eloszlásokat ebben a pontban konstruáltunk:

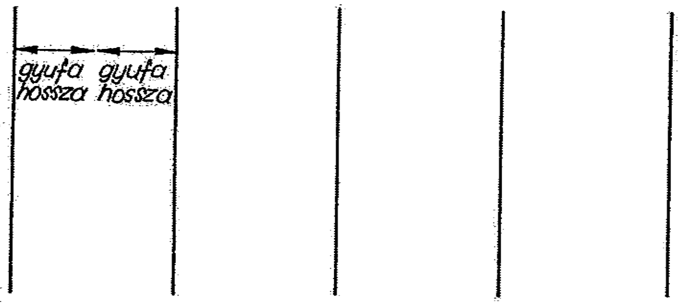


58. ábra

2. Természetesen a különböző eloszlástipusok még keveredhetnek is. Mivel a gyakorlatban a diszkrét és a sürüségfüggvénnyel rendelkező folytonos (röviden: folytonos) eloszlások a legfontosabbak, csak ezeket fogjuk részletesebben tárgyalni.

4. Egyenletes eloszlás

Feladat: Vegyünk egy gyufaszálat és egy nagy iv papirt. A papirra huzzunk párhuzamos egyeneseket ugy, hogy az egyenesek egymástól való távolsága két gyufaszálnyi legyen:



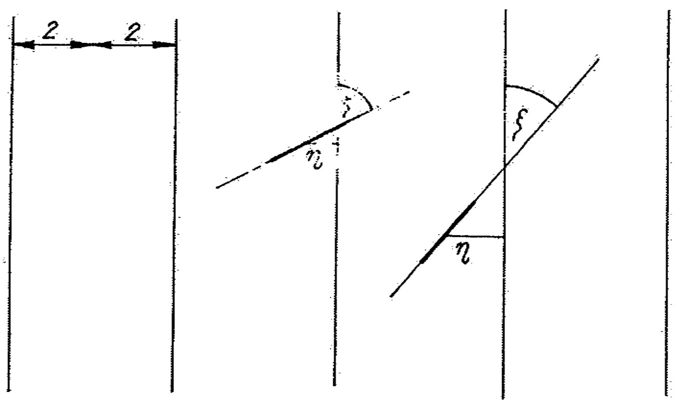
59. ábra

Fogjuk meg a gyufaszálat az egyik végén. A függőlegesen lógó gyufaszállal a kezünkben mozgassuk kezünket a papir fölött elég magasan a párhuzamos egyenesek irányára merőlegesen. Egy véletlen pillanatban állitsuk meg kezünket, és ejtsük le a gyufát. A gyufa ráesik a papirra. (Ha leugrana a papirról, akkor ismételjük meg a kisérletet addig, amig a gyufa a papiron marad.) Két lehetőség van. A gyufa vagy metszi valamelyik egyenest, vagy egyiket sem metszi. (Ha netán nem tudnánk dönteni e fölött, akkor végezzünk ujabb dobást!) Ki fogjuk számitani annak az eseménynek a valószinüségét, hogy a gyufa metszi valamelyik egyenest. A számitás gondolatának megértése több szempontból is hasznos lesz.

Megoldás: Mint látni fogjuk, a megoldás során a gyufa hosszának felével kell majd számolnunk. Ezért vegyük a gyufa hosszát 2 egységnek. Legyen

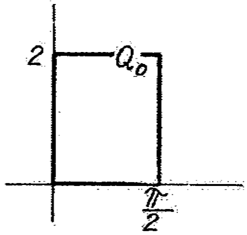
ξ = a gyufa által meghatározott egyenesnek a párhuzamos egyenesekkel bezárt (kisebb) szöge radiánban mérve,

η = a gyufa középpontjának a hozzá legközelebb eső egyenestől való távolsága.



60. ábra

ξ és η értékeire nyilván fennáll, hogy $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \eta \leqslant 2$. Kézenfekvő, hogy ξ is és η is egyenletes eloszlásunak vehető a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ illetve a $[0, 2]$ intervallumon. A (ξ, η) pont az ábrán Q_0-lal jelölt téglalapba esik:

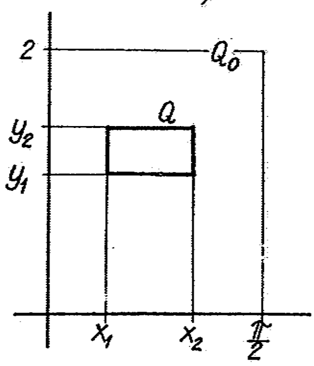


61. ábra

Ezért a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása erre a $\frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$ területű téglalapra koncentrálódik. Az eloszlás kieszelése céljából tekintsük az $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$ eseményeket, ahol $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant 2$. Ezek az események függetleneknek tekinthetők, hiszen akárhol is esik le a gyufa, a függőleges ejtés miatt akármerre dőlhet: az $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$ esemény bekövetkezéséből semmivel se válunk okosabbá az $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$ eseménnyel kapcsolatban. A függetlenség miatt $P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2, y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2) = P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) \cdot$

$$\cdot P(y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2) = \frac{x_2 - x_1}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{\pi}.$$

Az $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$ és az $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$ események együttes bekövetkezése éppen azt jelenti, hogy a (ξ, η) pont az ábrán Q-val jelölt téglalapba esik:

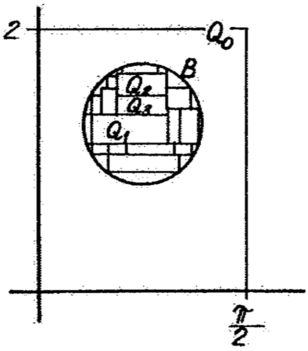


62. ábra

Tehát minden Q_o-beli Q téglalapra, melynek oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak,

$$P\left((\xi, \eta) \in Q\right) = \frac{t(Q)}{t(Q_o)},$$

ahol t-vel a halmazok területét jelöltük. A $P((\xi, \eta) \in Q) = \frac{t(Q)}{t(Q_o)}$ tulajdonság a téglalapokról átöröklődik tetszőleges Q_o-beli B halmazra. Ezt a tényt csak olyan B halmazokra igazoljuk, melyeket "mozaikszerűen ki lehet rakni" koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalu Q_i téglalapokból:



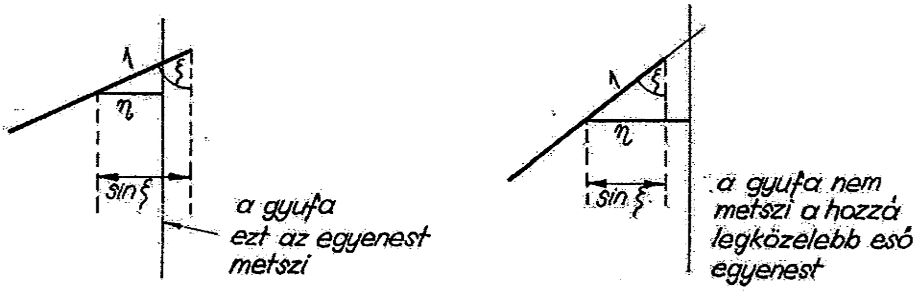
63. ábra

Mivel a B halmaz "mozaikszerűen áll elő" a Q_i tégalapokból, a valószinűség és a terület összegzési tulajdonságából adódik, hogy

$$P\left((\xi, \eta) \in B\right) = \sum_i P\left((\xi, \eta) \in Q_i\right) = \sum_i \frac{t(Q_i)}{t(Q_o)} = \frac{t(B)}{t(Q_o)}.$$

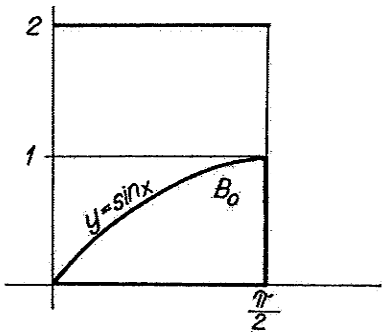
Tehát tetszőleges Q_o-beli B halmaz esetén a (ξ, η) pont B-be esésének valószinűsége arányos a halmaz területével, vagyis a Q_o halmazon a területtel arányosan kell szétkenni a festéket.

Most vizsgáljuk meg, mi annak a feltétele, hogy a gyufa valamelyik párhuzamos egyenest messe. Az alábbi ábrákból kiolvasható, hogy a gyufa pontosan akkor metszi valamelyik egyenest, ha $\eta < \sin \xi$:



64. ábra

Az $\eta < \sin \xi$ egyenlőtlenség a Q_0 téglalapnak egy B_0 részhalmazát jelöli ki, melynek területe $t(B_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$.



65. ábra

Tehát a gyufa pontosan akkor metszi valamelyik egyenest, ha a (ξ, η) pont B_0-ba esik. Ennek valószinüsége pedig területek hányadosaként írható fel:

$$P\left((\xi, \eta) \in B_0\right) = \frac{t(B_0)}{t(Q_0)} = \frac{1}{\pi} .$$

Azt kaptuk, hogy

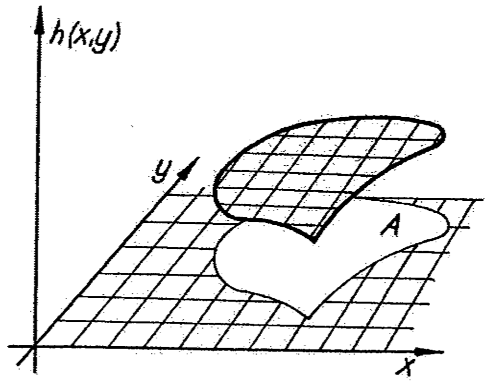
$$P(\text{a gyufa metszi valamelyik egyenest}) = \frac{1}{\pi} . \blacksquare$$

E feladat kapcsán vezetjük be a síkbeli egyenletes eloszlás fogalmát.

Ha egy A halmaz a síknak véges területű részhalmaza, akkor az A halmazon vett egyenletes eloszlásnak nevezzük azt a valószínűségeloszlást, mely az A halmazon a területtel arányosan keni szét az egységnyi festékmennyiséget. (Az arányossági tényező nyilván $\frac{1}{t(A)}$.)

Az egyenletes eloszlás nyilván folytonos eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{t(A)}, & \text{ha } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



66. ábra

Megjegyzések:

1. Gyakran előfordul, hogy valamilyen esemény valószínűségének meghatározása – gyufadobálós problémánkhoz hasonlóan – alkalmasan választott valószínűségi változók bevezetésével, azok együttes eloszlásának kieszelésével, majd az eseménynek megfelelő halmazra kent festékmennyiség meghatározásával lehetséges.

2. A π szám reciprokát tetszőleges pontossággal meg lehet határozni. Gyufadobálós feladatunk alapján ugy is közelíthetjük az $\frac{1}{\pi}$ értéket, hogy feldobunk sok (mondjuk 1000 darab) gyufát, és megszámoljuk, hogy a gyufák hányad része metsz valamilyen egyenest. Ezzel a relativ gyakorisággal közelíthetjük az $\frac{1}{\pi}$ valószínűséget. Annak eldöntésével, hogy adott pontosságu közelítés eléréséhez hány gyufát kell feldobni, később, a nagy számok gyenge törvényeinél még foglalkozunk. Előfordul, hogy valamilyen bonyolult kifejezés értékét a következőképpen határozzák meg. A "számitógépben generált" valószínűségi változókkal kapcsolatban kieszelnek egy olyan eseményt, melynek valószínűsége a megadott kifejezés értéke, és utána a számitógéppel végeztetik el a sok kisérletet (mintha a számitógép "1000-szer feldobná a gyufát") és a relativ gyakoriság kiszámolását.

3. Vegyük észre, hogy ξ és η együttes eloszlása azért egyenletes eloszlás a Q_0 téglalapon, mert

a) ξ egyenletes eloszlásu a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon,

b) η egyenletes eloszlásu a $[0, 2]$ intervallumon,

c) ξ -nek és η -nak "egymáshoz nincsen semmi köze sem",

ξ és η függetlenek egymástól. (A valószinüségi változók függetlenségének definicióját később pontosabban és általánosabban meg fogjuk adni.)

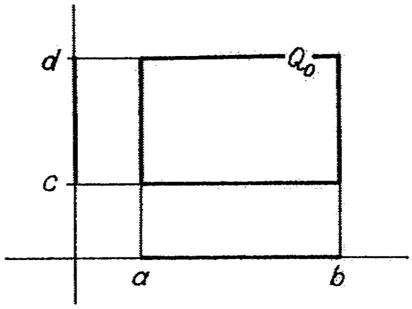
Ezért világos, hogy ha

a) ξ egyenletes eloszlásu az $[a, b]$ intervallumon,

b) η egyenletes eloszlásu a $[c, d]$ intervallumon,

c) ξ és η függetlenek,

akkor (ξ, η) egyenletes eloszlásu az intervallumoknak megfelelő Q_0 téglalapon:



67. ábra

4. Ha egy véletlen jelenséggel kapcsolatos probléma megoldható (egy- vagy kétdimenziós) egyenletes eloszlásu valószinüségi változók bevezetésével, akkor geometriai problémáról szokás beszélni. A szóhasználatot azzal magyarázhatjuk, hogy egyenletes eloszlás esetén a valószinüséget (egydimenziós esetben) hosszuságok, (kétdimenziós esetben) területek hányadosaként kapjuk meg. A hosszuság- és területszámitást pedig a geometria keretein belül szokták tanitani. A fenti példában megmutattuk, hogy miért vehetjük ξ és η együttes eloszlását egyenletesnek a téglalapon. Gyakori hiba szokott lenni, hogy hosszuságok vagy területek hányadosaként számolnak valószinüségeket olyankor is, amikor semmi sem indokolja az egyenletes eloszlás használatát. (Az itt használt "geometriai probléma" kifejezés nem tévesztendő össze a "geometriai eloszlás" fogalmával!)

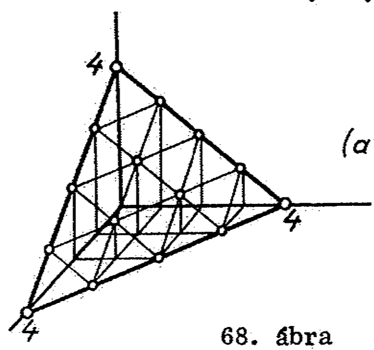
5. Többdimenziós valószínűségi változó

Ha egy véletlen jelenséggel kapcsolatban r darab valószinüségi változót tekintünk, akkor ezek együttesen az r-dimenziós tér valamely véletlenszerü pontját, azaz egy <u>r-dimenziós valószinüségi változót</u> határoznak meg. Például, ha a napi csapadékmennyiséget 19 városban mérjük meg, akkor egy 19 dimenziós valószinüségi változót kapunk.

Mindaz amit korábban és később az $r = 2$ esetre elmondunk, értelemszerüen $r > 2$-re is átfogalmazható. Mivel a valószinüségszámitás legfontosabb fogalmai, tételei már az $r = 2$ esetben előbukkannak, a könnyebb érthetőség és szemléltethetőség kedvéért ezzel az esettel foglalkoztunk részletesebben. A magasabb dimenziós eloszlások illusztrálására a következő pontban bemutatjuk a polinimiális eloszlást.

6. Polinomiális eloszlás

Célbalövünk olyan közelről, hogy a céltáblát biztosan eltaláljuk. A céltáblát előzőleg három részre osztjuk ugy, hogy p_i legyen a valószinüsége annak, hogy az i-ik részbe esik a találat $(i = 1,2,3)$. n darab lövést adunk le. Feltételezzük, hogy az egyes lövések egymástól függetlennek tekinthetők. Az, hogy hányszor találunk az i-ik részbe, véletlentől függ, vagyis valószinüségi változó, amelyet ξ_i-vel jelölünk $(i = 1,2,3)$. Kézenfekvő, hogy ξ_i (egydimenziós) eloszlása n-edrendü, p_i paraméterü binomiális eloszlás. Tekintsük a ξ_1, ξ_2, ξ_3 valószinüségi változókból összetevődő ξ valószinüségi változót. ξ eloszlása nyilván diszkrét, hiszen ξ értékeként csak olyan (k_1, k_2, k_3) számhármas adódhat, melyre teljesül, hogy k_1, k_2, k_3 nem negativ egész és $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Az alábbi ábrán bejelöljük ezeket a pontokat:



(a rajzon n-t 4-nek vettünk)

68. ábra

Kiszeljük, hogy mi a valószinüsége annak, hogy ξ értékeként egy ilyen (k_1, k_2, k_3) számhármas adódik. Vagyis mi annak a valószinüsége, hogy k_1-szer találunk az első, k_2-ször találunk a második, k_3-szor a harmadik részbe. Nyilvánvaló, hogy ha előirjuk, hogy melyik k_1 darab lövésnél találjunk az első, melyik k_2 darab lövésnél a második és melyik k_3 darab lövésnél a harmadik részbe, akkor ennek a valószinüsége $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$ -mal egyenlő. Kombinatorikai ismereteinkből (ismétléses permutációk) nyilvánvaló, hogy $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!}$ -féleképpen irhatjuk ezt elő, s igy annak a valószinüsége, hogy az n darab lövés során pontosan k_1-szer találunk az első, k_2-ször találunk a második és k_3-szor a harmadik részbe, egyenlő a következővel:

$$P(\xi_1 = k_1, \quad \xi_2 = k_2, \quad \xi_3 = k_3) = \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!}\, p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \, .$$

Vagyis ξ eloszlása olyan, hogy a (k_1, k_2, k_3) pontra kerülő festékcsomó nagysága $\frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!}\, p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$.

Ha nem három, hanem r részre osztjuk a céltáblát, és az i-ik rész találatának valószinüsége p_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, akkor egy r-dimenziós ξ valószinüségi változót kapunk. Ennek i-ik komponense az a ξ_i valószinüségi változó, mely azt mutatja, hogy hányszor találtunk az i-ik részbe. A fentiekhez hasonló gondolatmenettel kiadódik, hogy ξ eloszlása az r-dimenziós téren olyan, hogy egy $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ szám r-esre kerülő festékcsomó nagysága

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}\, p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots \cdot p_r^{k_r} ,$$

ha $k_1, k_2, \ldots, k_r$ nem-negativ egész, és $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Ennek a valószinüségeloszlásnak a neve: n-edrendü, r-dimenziós $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ paraméterü polinomiális eloszlás.

Érezhető az általánositás: ha egy véletlen jelenséggel kapcsolatban az $A_1, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak,

$p_i = P(A_i)$ $(i = 1,\dots,n)$, és a véletlen jelenségre n darab független kisérletet végzünk, akkor a

ξ_i = ahányszor az A_i esemény bekövetkezik $(i=1,\dots,r)$

valószinüségi változók együttes eloszlása n-edrendü r-dimenziós $(p_1,\dots,p_r)$ paraméterü polinomiális eloszlás.

Például 25-ödrendü, 6-dimenziós $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ paraméterü polinimiális eloszlásu valószinüségi változót kapunk, ha a dobókockát 25-ször feldobjuk, és

ξ_1 = ahányszor 1-es a dobás eredménye,

ξ_2 = " 2-es " ,

⋮

ξ_6 = " 6-os " ,

és tekintjük a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ komponensekből összetevődő 6-dimenziós valószinüségi változót.

A polinomiális eloszlás onnan kapta a nevét, hogy tagjait megkaphatjuk, ha a $p_1 + p_2 + \dots + p_r$ több-tagu kifejezés (latinul: polinom) n-ik hatványát tagokra bontjuk:

$$(p_1+p_2+\dots+p_r)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r \\ \text{nem negativ egész,} \\ k_1+k_2+\dots+k_r=n.}} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!}\, p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}.$$

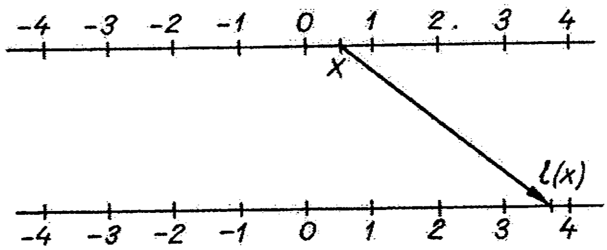
Ebből az azonosságból az is látszik, hogy a polinomiális eloszlás valószinüségeloszlás, ugyanis $(p_1 + p_2 + \dots + p_r)^n = 1^n = 1$.

VII. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK FÜGGVÉNYE

1. Eloszlástranszformáció egydimenzióban

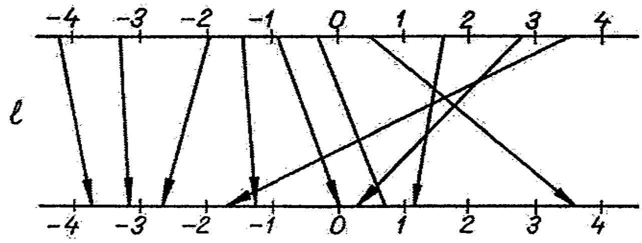
Legyen ξ valószínűségi változó, ℓ pedig legyen valamilyen adott függvény. Ha ξ megfigyelt értékét ℓ-be helyettesítjük, tehát az $\ell(\xi)$ számot vesszük, akkor ujabb, ugyancsak véletlentől függő számot kapunk. (Például 1. vehetjük ξ négyzetét, 2. ξ értékét a tangens függvénybe helyettesíthetjük.) Jelöljük ezt a valószínűségi változót η-val: $\eta = \ell(\xi)$. (Példáinkban 1. $\eta = \xi^2$, 2. $\eta = \mathrm{tg}\ \xi$.) Ilyenkor az η valószínűségi változót ξ <u>függvényének</u> nevezzük. Kérdés, hogyan lehet ξ eloszlásából és az ℓ függvényből η eloszlását meghatározni. A kérdésre egyszerűen és szemléletesen felelhetünk, ha megismerkedünk az eloszlástranszformáció fogalmával.

Ha ℓ a valós számok halmazán értelmezett valós értékeket felvevő függvény, akkor ℓ minden valós számhoz hozzárendel egy másik valós számot. (Az x-hez rendelt számot jelöljük $\ell(x)$-szel.) Ezt többek között így szemléltethetjük: vesszük a számegyenes két példányát, és x-ből $\ell(x)$-be huzunk egy nyilat:



69. ábra

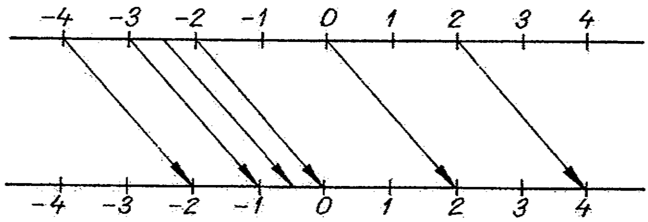
Gondolatban ezt minden olyan x valós számra megcsináljuk, melyre az ℓ függvény értelmezett, s megkapjuk az ℓ függvényt szemléltető "<u>nyilerdőt</u>":



70. ábra

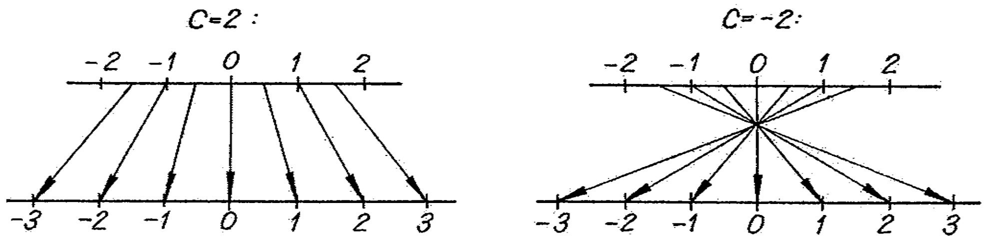
Érdemes alaposabban megismerkedni a függvények nyilerdős szemléltetésével. Ezért vesszük a következőket.

1. Az $\ell(x) = x+2$ függvény minden pontot 2-vel jobbra tol:



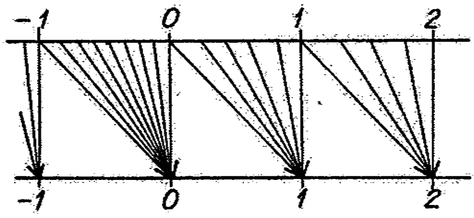
71. ábra

2. Az $\ell(x) = c \cdot x$ függvény (c konstans) minden pontnak az origótól való távolságát $|c|$-szeresére növeli. Ha c negatív, akkor emellett még át is tükrözi a pontokat az origón:



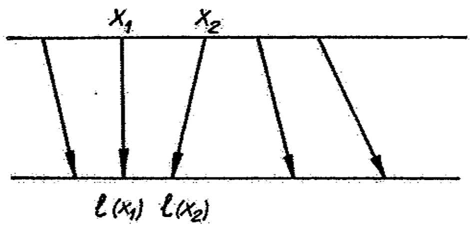
72. ábra

3. Az $\ell(x) = [x] + 1$ függvény a balról zárt jobbról nyilt $[k-1, k)$ intervallumot a k pontba képzi:



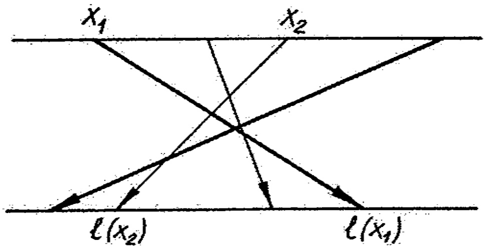
73. ábra

4. Ha az ℓ függvény szigoruan monoton növekedő, akkor "nyilai" nem keresztezik egymást: $x_1 < x_2$ esetén $\ell(x_1) < \ell(x_2)$:



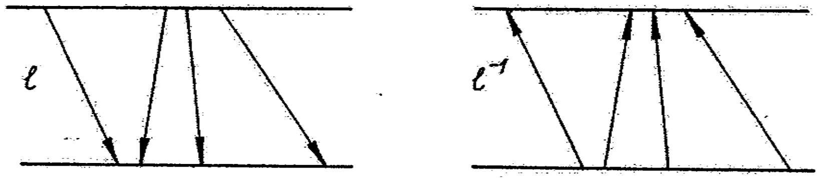
74. ábra

5. Ha az ℓ függvény szigoruan monoton csökken, akkor bármely két "nyila" keresztezi egymást: $x_1 < x_2$ esetén $\ell(x_2) < \ell(x_1)$:



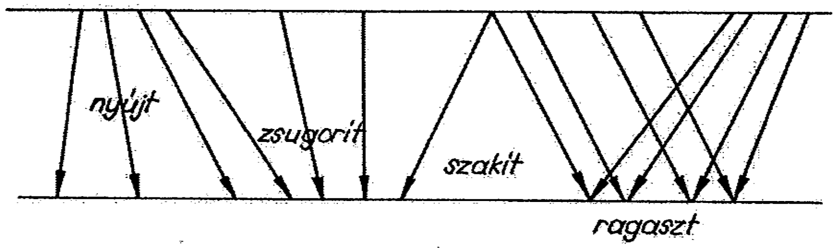
75. ábra

6. Ha az ℓ függvény folytonos, akkor Bolzano tétele szerint tetszőleges $\ell(a)$ és $\ell(b)$ közé eső y értékhez van olyan x pont a és b között, hogy $\ell(x) = y$. Ha ℓ szigoruan monoton, akkor csak egyetlen ilyen pont lehet. Ezt az y-től függő pontot $\ell^{-1}(y)$-nal jelöljük. Az ℓ^{-1} függvényt nevezzük az ℓ függvény <u>inverzének</u>. Az inverzfüggvény nyilerdejét megkapjuk, ha az eredeti függvény nyilait megfordítjuk:



76. ábra

Az ℓ függvény hatását ugy is elképzelhetjük, hogy a függvény a nyilak mentén a felső számegyenest áttranszformálja - magyarul: átviszi, átgyurja - az alsóba. Ha a számegyenest valami könnyen deformálható anyagból képzeljük el, akkor ezen transzformáció közben egyes helyeken nyulik, máshol zsugorodik, sőt el is szakadhat és össze is tapadhat a számegyenes:

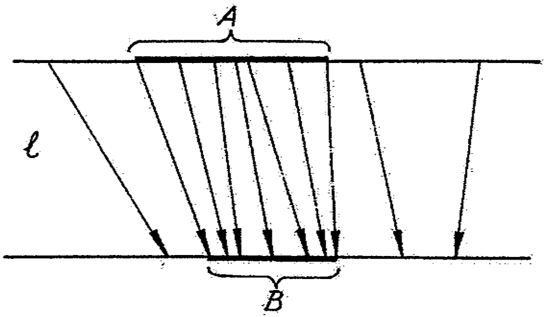


77. ábra

Most képzeljük el, hogy a felső számegyenes festékkel van bekenve. A "gyömöszölés", azaz a függvény a számegyenessel együtt a festéket is magával viszi, aminek eredményeként az alsó számegyenes is festékkel kenődik be. Mindezt azzal a szóhasználattal fejezzük ki, hogy az ℓ függvény a felső számegyenesen vett eloszlást áttranszformálja az alsó számegyenesre.

Mindennek valószinüségszámitási jelentése a következő: ha $\eta = \ell(\xi)$, akkor ξ eloszlásából ugy kapjuk meg η eloszlását, hogy a ξ eloszlását az ℓ függvénnyel áttranszformáljuk.

Ugyanis vegyük a számegyenesnek tetszőleges B részhalmazát. Jelöljük A-val azon x pontok halmazát, melyekre $\ell(x) \in B$:

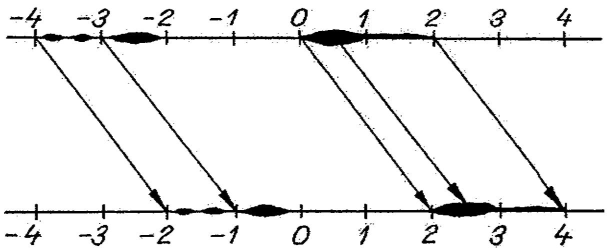


78. ábra

Az A halmazon ξ eloszlása szerint annyi festék van, amennyi a $\xi \in A$ esemény valószinüsége. Másrészt A definiciója miatt $\xi \in A$ akkor és csak akkor, ha $\eta \in B$. Tehát azt is mondhatjuk, hogy az A halmazon annyi festék van, amennyi az $\eta \in B$ esemény valószinüsége. Az eloszlástranszformáció értelmezése miatt a B halmazon annyi festék van, amennyi az A halmazon volt. Tehát a B halmazon lévő festékmennyiség megegyezik az $\eta \in B$ esemény valószinüségével. Mivel ez akármilyen halmazra igy van, a transzformált eloszlás tényleg az η eloszlása.

Nézzünk néhány példát eloszlástranszformációra:

1. Az $\ell(x) = x+2$ függvény az eloszlást 2-vel jobbra tolja:



79. ábra

Ennek valószinüségszámitási jelentése: ξ eloszlásából ugy kapjuk meg $\xi+2$ eloszlását, hogy az eloszlást 2-vel jobbra toljuk.

2. Az $\ell(x) = c \cdot x$ függvény (c konstans) az eloszlást az origóból nézve $|c|$-szeresére nyujtja, $c < 0$ esetén a nyujtással egyidőben egy tükrözés is történik az origóra: