Matematika A4
Néhány korábbi gyakorlatvezető idén is aktuális megoldása

1. Első hét

1.10./6: A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg? *Megoldás: Az első helyre kerülhet mind a* 7 *törpe, a második helyre már csak* 6 *törpe kerülhet, és így tovább. Így a lehetséges sorrendek száma:* $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$. *(ismétlés nélküli permutáció)*

1.10./7: Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi? *Megoldás: A MATEMATIKA szó* 10 *betűből áll. Az előző feladat alapján* 10 *betűt* $10!$ *féleképpen lehet sorbarakni. De az A, M és T betűk ismétlődnek* $3-2-2$ *alkalommal, és ezeket nem kell megkülönböztetni egymástól. Azaz a keresett sorrendek száma:* $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$. *(ismétléses permutáció)*

1.10./8: Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.) *Megoldás: Az első helyezett még* 5 *emberből kerülhet ki, a második már csak* 4*-ből, a harmadik pedig csak* 3*-ból. Azaz a keresett sorrendek száma* $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. *(ismétlés nélküli variáció)*

1.10./9: Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet egyfajtából többet is venni? *Megoldás: Az első gombóc* 5 *féle lehet, a második gombóc szintén* 5 *féle. Így a keresett fagylaltok száma:* $5 \cdot 5 = 25$. *(ismétléses variáció)*

1.10./10: Van 6 lányismerősöm, és kettőt el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg? *Megoldás: Az első lányt még* 6*-ból választhatom, a másodikat már csak* 5*-ből. De a kiválasztás sorrendje nem számít, így minden esetet kétszer számoltunk. Tehát a kiválasztások száma:* $\frac{6\cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15$. *(ismétlés nélküli kombináció)*

1.10./11: 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár- és 3 titkárnő-jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói? *Megoldás:* 6 *tanár közül* 3*-at, míg a* 3 *titkárnő közül* 1*-et kell kiválasztani, a kiválasztás sorrendje nem számít, és bármelyik tanár-választáshoz tartozhat bármely titkárnő-választás. Így a kiválasztások száma:* $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} = 60$. *(ismétlés nélküli kombináció)*

1.10./12: Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van? *Megoldás:* 10 *szám közül* 3*-at kell kiválasztani. Ez a kiválasztás a növekvő sorrendet már egyértelműen meghatározza, így a lehetséges kombinációk száma:* $\binom{10}{3} = 120$. *(ismétlés nélküli kombináció)*

1.10./13: Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk? *Megoldás: Az eseménytér: { II, FI, IF, FF}. Innen*

$$\mathbb{P}(\textit{dobunk fejet}) = \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan 1 fejet dobunk}) = \frac{2}{4}.$$

1.10./14: Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző? *Megoldás: Az első húzásnak itt csak abból a szempontból van jelentősége, hogy ez határozza meg a színt. Az összes eset a második húzás során is* 32*, a kedvező esetek száma pedig* 24*, hisz ennyi lap lesz különböző bármit is húztunk elsőre.*

$$\mathbb{P}(\textit{két lap különböző}) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

1.10./15: Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os? *Megoldás: A feladat megoldható leszámlálással vagy a komplementer esemény segítségével.*
$\mathbb{P}(\textit{legalább az egyik 6-os}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{egyik sem 6-os})$*. Az összes eset száma* $6 \cdot 6 = 36$*, míg a kedvező esetszám a komplementer esetben* $5 \cdot 5 = 25$*.*

$$\mathbb{P}(\textit{legalább az egyik 6-os}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36},$$

$$\mathbb{P}(\textit{egyik sem 6-os}) = \frac{25}{36}.$$

1.10./16: Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$? *Megoldás: Az eseménytér a következő:*
$\{FFF, FFL, FLF, LFF, FLL, LFL, LLF, LLL\}$*. Így*

$$\mathbb{P}(\textit{gyerekek egyneműek}) = \frac{2}{8}$$

.

1.10./17: Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej? *Megoldás: Itt is a komplementer esemény valószínűségét könnyebb kiszámolni. Ha* n*-szer dobunk a kockával, akkor* $\mathbb{P}(\textit{legalább 1 fej}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{egyik sem fej}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$*. A feltétel szerint* $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,9$*. Ha ezt az egyenlőtlenséget megoldjuk, akkor azt kapjuk, hogy* $n \geq 4$*, azaz legalább* 4 *pénzérme kell.*

1.10./18: Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek? *Megoldás: Az összes eset száma nem más, mint a* 7 *könyv sorbarendezése, azaz permutációja:* $7!$*. A kedvező esetek azok, amikor a trilógia kötetei egymás mellé kerülnek. A trilógia kötetei lehetnek az* $1-3$*,* $2-4$*,* $3-5$*,* $4-6$*,* $5-7$ *helyeken. Ez* 5 *eset. Ám a trilógia kötetei tetszőleges sorrendben lehetnek ezeken belül (*$3!$*), csakúgy, mint a többi könyv (*$4!$*). Így*

$$\mathbb{P}(\textit{trilógia kötetei egymás mellé kerülnek}) = \frac{5 \cdot 3! \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{7}.$$

1.10./19: Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön? *Megoldás: Az összes eset száma ebben az esetben* 6^6*, míg a kedvező esetek száma a* 6 *szám összes lehetséges sorbarendezése, azaz* $6!$*. Így*

$$\mathbb{P}(\textit{mind a hat szám előjön}) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}.$$

1.10./20: A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik? *Megoldás: Rögzítsük, hogy Ronaldo melyik csapatba kerül (ez szimmetriai okok miatt megtehető). Ekkor az összes eset:* $\binom{21}{10}$*-féleképp lehet feltölteni a csapatát. Kedvező esetek száma:* $\binom{20}{10}$*-féleképp lehet feltölteni a csapatát Ronaldinho nélkül.*

$$\mathbb{P}(\textit{különböző csapatba kerülnek}) = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{21}{10}} = \frac{11}{21}.$$

1.10./21: Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón (90-ből 5 számot húznak, sorrend nem számít) pontosan két találatunk lesz? És hogy legalább két találatunk lesz? *Megoldás: Az összes eset szám:* $\binom{90}{5}$*, hisz ennyiféleképpen tudunk kiválasztani* 90 *számból* 5*-öt. Kedvező esetek száma: az* 5 *kihúzott számból választottunk* 2*-t, és a maradék* 85*-ből választottunk* 3*-at,* $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$*. (hipergeometrikus eloszlás)*

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan 2 találat}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

A legalább két találat az jelenti, hogy $2, 3, 4, 5$ *találatunk lehet, ezeket a valószínűségeket kell összeadni. (komplementer eseménnyel is számolhatunk)*

$$\mathbb{P}(\textit{ legalább 2 találat}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} + \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} + \binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} + \binom{5}{5} \cdot \binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}.$$

1.10./22: Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki? *Megoldás: Ez a feladat az előzőhöz hasonlóan oldható meg. Az összes eset szám:* $\binom{10}{4}$*, hisz ennyiféleképpen tudunk kihúzni* 10 *golyóból* 4*-et. Kedvező esetek száma: a* 6 *zöld golyóból húztunk* 2*-t, és a maradék* 4 *sárgából* 2*-t,* $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$*. (hipergeometrikus eloszlás)*

$$\mathbb{P}(\textit{két zöldet húzunk}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{4}}.$$

2. Második hét

A feladatok eltérnek a korábbi félévek második hetén tárgyaltaktól. Így itt olyan feladatokat találtok a megoldásaikkal, amik ilyen formában nem szerepeltek idén, de akár szerepelhettek is volna.

Kapcsolódó 1: Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyeneletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik? *Megoldás: A háromszög magassága* $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$*, így a háromszög területe* $T_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$*. A beírható kör sugara a magasság egyharmada:* $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$*. Ebből a kör területe* $T_2 = (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2\pi$*. Így a keresett valószínűség:* $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$*.*

Kapcsolódó 2: Mi a valószínűsége, hogy a $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

(a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak? *Megoldás: A feltételek szerint* $x \leq 2y$*. Így a kedvező síkrész a négyzet* $y = \frac{x}{2}$ *egyenes feletti része. Ennek területe* $\frac{3}{4}$*. Mivel a négyzet egységnyi, ezért a kérdezett valószínűség is* $\frac{3}{4}$*.*

(b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátánál? *Megoldás: A feltételek szerint* $x^2 < y$*. Így a kedvező síkrész a négyzet* $y = x^2$ *parabola feletti része. Ennek területe* $1 - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$*. Mivel a négyzet egységnyi, ezért a kérdezett valószínűség is* $\frac{2}{3}$*.*

Kapcsolódó 3: Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $1/4$ területegységnél? *Megoldás: A két oldalhossz mint pontpár az egységnégyzeten egyenletes eloszlású. A gyakorlaton excel szimuláció segített a kedvező síkrész megtalálásában és az azzal való számolásban. A feltételek szerint* $K = 2x + 2y > 2$ *és* $T = xy < \frac{1}{4}$*. Így a kedvező síkrész a négyzet* $y = x - 1$ *egyenes feletti és az* $y = \frac{1}{4x}$ *hiperbola alatti része (a két rész metszete). A hiperbola alatti terület* $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{4x} dx = \frac{1}{4} ln(4)$*. A kedvező területet ebből úgy kapjuk, hogy kivonjuk belőle az alsó* $\frac{3}{4}$ *hosszú befogókkal rendelkező derékszögű háromszög területét és hozzáadjuk a felső* $\frac{1}{4}$ *hosszú befogókkal rendelkező derékszögű háromszög területét:* $\frac{1}{4} ln(4) - \frac{(\frac{3}{4})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{4})^2}{2}$*, ami* $\frac{1}{4} ln(4) - \frac{1}{4}$*. Mivel a négyzet egységnyi, ezért a kérdezett valószínűség is* $\frac{1}{4} ln(4) - \frac{1}{4}$*.*

Kapcsolódó 4: 0 és 1 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám? *Megoldás: Az egységnégyzeten van egyenletes eloszlásunk. Itt a kedvező síkrészt érdemes külön keresni az* $y > x$ *és az* $y < x$ *esetekben. Előbb tegyük föl, hogy* $y > x$*. Ez azt jelenti, hogy most az* $y = x$ *egyenes felett keressük meg a kedvező pontpárokat. Ekkor a feltétel* $y - x < x$*-re egyszerűsödik, ami ekvivalens az* $y < 2x$ *feltétellel. Így ebben az esetben az egységnégyzet* $y = x$ *és* $y = 2x$ *egyenesek közti pontjai kedvezőek. Tegyük most fel, hogy* $y < x$*. Ekkor a feltétel* $x - y < y$*-re egyszerűsödik, ami ekvivalens az* $y > \frac{x}{2}$ *feltétellel, így ebben az esetben az egységnégyzet* $y = x$ *és* $y = \frac{x}{2}$ *egyenesek közti pontjai kedvezőek. Összességében az* $y = 2x$ *és* $y = \frac{x}{2}$ *egyenesek határolta síkrész a kedvező. Ennek a területét megkapjuk ha a négyzet egységnyi területéből levonjuk a két oldalsó háromszög területét. Így kedvező síkrész területe* $\frac{1}{2}$*, ami tekinvte, hogy egységnégyzettel dolgozunk megegyezik a kérdezett valószínűséggel. Megjegyzem, hogy az* $y = x$ *egyenesre esés valószínűsége* 0*, ezért nem foglalkoztunk ezzel a lehetőséggel.*

Végezetül egy az idei jegyzetben is szereplő feladathoz kötődően megjegyezzük az alábbiakat.

3.5./8: *Bertrand-paradoxon - híres probléma*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

1. A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

2. A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

3. A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.

Megjegyzés: Ez a feladat alkalmas arra, hogy összezavarjon titeket. Aki bizonytalannak érzi a tudását az inkább hagyja ki ezt a feladatot. Az angol nyelvű wikipédián (http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability)) mindhárom hozzáállásból adódó megoldást megtaláljátok. A három hozzáállás különböző eredményre vezet. Ez csak *látszólag paradoxon. A lényeg ott van, hogy a "kör húrjai közül véletlenszerűen választva" kifejezés nem határozza meg pontosan a véletlen választás módját. A három megoldás három különböző pontosabb meghatározáson alapul. A gyakorlatban ha hasonló problémával szembesülünk, akkor ki kellene kísérletezni, hogy a három lehetőség közül most éppen melyikkel is van dolgunk.*

3. Harmadik hét

5.10./4b és 4a: A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok $5-5$ lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)? *Megoldás: A komplementer módszer segítségével* $\mathbb{P}(\textit{az ellenfélnek van zöldje}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{ az elenfélnek nincs zöldje})$. *A feladat hipergeometrikus eloszlással oldható meg (lásd lottós feladat). Így a feltételes esetben a következőt kapjuk*

$$\mathbb{P}(\textit{az ellenfélnek van zöldje}|\textit{nekem 3 zöld és két piros}) = 1 - \frac{\binom{13}{5}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{15}{5}}.$$

Abban az esetben, ha az én lapjaimról nem tudunk semmit, akkor nincs annak jelentősége, hogy én is kaptam 5 lapot. Így ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\textit{az ellenfélnek van zöldje}) = 1 - \frac{\binom{15}{5}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{20}{5}}.$$

5.10./5: Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

(a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé? *Megoldás:* $\mathbb{P}(B1) = \frac{110}{260}$

ii) betegé? Megoldás: $\mathbb{P}(A1) = \frac{100}{260}$

iii) beteg fiúé? *Megoldás:* $\mathbb{P}(A1\cap B1) = \frac{50}{260}$

(b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam? *Megoldás: Használva a feltételes valószínűség definícióját kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(A1|B2) = \frac{\mathbb{P}(A1\cap B2)}{\mathbb{P}(B2)} = \frac{\frac{40}{260}}{\frac{120}{260}} = \frac{40}{120}.$$

(c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető? *Megoldás: Használva a feltételes valószínűség definícióját kapjuk, hogy*

$$\mathbb{P}(B3|A1) = \frac{\mathbb{P}(B3\cap A1)}{\mathbb{P}(A1)} = \frac{\frac{10}{260}}{\frac{100}{260}} = \frac{10}{100}.$$

(d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz? *Megoldás: Itt a megoldásnál a szorzási szabályt használjuk.*

$$\mathbb{P}(\textit{1 fiú - 1 lány karton}|\textit{beteg kupacból húzok}) = \frac{50}{100}\cdot\frac{40}{99}.$$

$$\mathbb{P}(\textit{2 fiú karton}|\textit{beteg kupacból húzok}) = \frac{50}{100}\cdot\frac{49}{99}.$$

5.10./6: Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat a) visszatesszük *Megoldás: Legyen A_1 az az esemény, hogy az első húzás piros, A_2 az, hogy a második húzás fehér, és A_3 az, hogy a harmadik húzás zöld. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_2\cap A_1)=\frac{3}{14}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{6}{14}.$$

b) nem tesszük vissza? *Megoldás: Ekkor a fenti számok a következőképpen módosulnak:*

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_2\cap A_1)=\frac{3}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{6}{12}.$$

5.10./7: Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány
a) átvészeli a teljes eljárást? *Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy a csótányok túlélik az i-dik irtást, $I = 1, 2, 3$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(\textit{túlél})=\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_2\cap A_1)=0,4\cdot 0,6\cdot 0,8=0,192.$$

b) az utolsó irtáskor pusztul el? *Megoldás: Ekkor a keresett valószínűség*

$$\mathbb{P}(\textit{3. irtásnál hal meg})=\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})=\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(\overline{A_3}|A_2\cap A_1)=0,4\cdot 0,6\cdot 0,2=0,048.$$

c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve? *Megoldás: Ekkor használva a feltételes valószínűség definícióját*

$$\mathbb{P}(\textit{túlél}|\textit{1. irtást túlélte})=\frac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1)}=\frac{\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_2\cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)}=0,6\cdot 0,8=0,48.$$

5.10./8: Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes? *Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy az i-dik húzás során kivett alkatrész működőképes, $i = 1, 2, 3$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=\mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_2\cap A_1)=\frac{13}{16}\cdot\frac{12}{15}\cdot\frac{11}{14}.$$

5.10./9: Egy valszámvizsgán 30 tétel van. Ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy a) csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt?

b) mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!) c) egyik sem húz ilyen tételt? *Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy az i-dik hallgató nevezetes eloszlásos tételt húz, $i = 1, 2$. Ekkor*

$$\mathbb{P}(\textit{első nevezetes eo, a második nem}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}|A_1) = \frac{6}{30} \cdot \frac{24}{29}.$$

$$\mathbb{P}(\textit{mindkettő nevezetes eo}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{6}{30} \cdot \frac{6}{30}.$$

$$\mathbb{P}(\textit{egyik sem nevezetes eo}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_2}|\overline{A_1}) = \frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29}.$$

(Az a) és c) esetben feltettük, hogy nem húzhatják ugyanazt a tételt.)

5.10./12: Egy suli tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak hány %-a bukik meg az első vizsgán? *Megoldás: Itt az A esemény lesz az, hogy valaki megbukik a vizsgán. A teljes eseményrendszer: H_1 jelöli azt az eseményt, hogy a hallgató lány, H_2 pedig azt, hogy fiú. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,8$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,2$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,15$ illetve $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,1$. Így a teljes valószínűség tétele alapján:*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,15 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,14.$$

5.10./15: A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották? *Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a ketyerét az A, B vagy C gépsoron állították elő ($i = 1, 2, 3$). És legyen A az az esemény, hogy a ketyere hibás. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 0,25$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,35$, $\mathbb{P}(H_3) = 0,4$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,05$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,04$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 0,02$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűségeket:*

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4},$$

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,04 \cdot 0,35}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4},$$

$$\mathbb{P}(H_3|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3) \cdot \mathbb{P}(H_3)} = \frac{0,02 \cdot 0,4}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4}.$$

5.10./16: Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

(a) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le? *Megoldás: Legyen H_i az az esemény, hogy a bináris csatornán 0 vagy 1 jelet adtak le ($i = 1, 2$). És legyen A az az esemény, hogy 0-t kaptunk. Ekkor a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(H_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(H_2) = 2/3$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/5$. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk a keresett valószínűséget:*

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{15}{23}.$$

(b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk? *Megoldás: Használva az előző rész jelöléseit, itt a teljes valószínűség tétele alapján kapjuk a keresett valószínűséget:*

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A}|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(\overline{A}|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0,65.$$

6.5./4: Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ a dobott számok összege 7 , $B =$ legalább az egyik kockán van hatos , $C =$ mindkét kockával páratlant dobok , $D =$ a két kockával különböző számokat dobok , $E =$ a zöld kockával 4-est dobok .
Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

(a) Függetlenek-e egymástól az A és C események? *Megoldás: A feladat szövege alapján* $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. *Ugyanakkor* $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$. *Így nem teljesül a* $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ *azonosság, tehát A és C nem lehetnek függetlenek.*

(b) Kizáróak-e az A és C események? *Megoldás: Igen, hisze együttes bekövetkezési valószínűségük* 0. *(*$\mathbb{P}(A \cap C) = 0$*)*

(c) Mennyi a B esemény valószínűsége? *Megoldás:* $\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}$

(d) Hogy viszonyul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve? *Megoldás: Az A esemény része a D eseménynek. Azaz, ha A bekövetkezik, akkor D is. Így A és D nem lehetnek függetlenek, illetve* $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(D)$ *teljesül.*

(e) Függetlenek-e egymástól az A és E események? *Megoldás: A feladat szövege alapján* $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A \cap E) = \frac{1}{36}$. *Így teljesül a* $\mathbb{P}(A \cap E) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(E)$ *azonosság, tehát A és E függetlenek.*

(f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

  a) függetlenek, de nem kizáróak *Megoldás: A és E események*

  b) kizáróak, de nem függetlenek *Megoldás: A és C események*

8./5.: Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B-nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy a) az első üzletkötés kedvező lesz? b) mindkét üzletkötés javunkra válik? c) lesz köztük rossz és jó üzlet is? *Megoldás:Itt az A esemény lesz az, hogy kedvező az üzletkötés. A teljes eseményrendszer: H_1 jelöli azt az eseményt, hogy az A céggel kötünk üzletet, H_2 pedig azt, hogy a B céggel. Ekkor a következő valószínűségek ismertek.* $\mathbb{P}(H_1) = 0,5$, $\mathbb{P}(H_2) = 0,5$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0,6$ *illetve* $\mathbb{P}(A|H_2) = 0,7$.
a) rész megoldásava teljes valószínűség tétele alapján:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,65.$$

b) részben B jelentse azt az eseményt, hogy mindkét üzletkötés kedvező. Ekkor $\mathbb{P}(B|H_1) = 0,6^2$ *illetve* $\mathbb{P}(B|H_2) = 0,7^2$. *Így ismét a teljes valószínűség tétele alapján*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(B|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 0,6^2 \cdot 0,5 + 0,7^2 \cdot 0,5 = 0,65.$$

c) részben C jelenti azt az eseményt, hogy az egyik üzlet sikeres, a másik pedig nem. Ekkor $\mathbb{P}(C|H_1) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4$ *illetve* $\mathbb{P}(C|H_2) = 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3$ *(itt a 2-es szorzóra azért van szükség, mert az első ás a második üzlet is lehet a sikeres). Így ismét a teljes valószínűség tétele alapján*

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(C|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,45.$$