1. vizsga, 2016-12-19, Feladatok és megoldások

1. **(a)** Adja meg az

i	0	1	2	$\dots$
p_i	p_0	p_1	p_2	$\dots$

diszkrét eloszlás várható értékének a definícióját!

Megoldás:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i$$

3 pont

(b) Tegyük fel, hogy a rigófészkekben található tojások X száma a

i	0	1	2	3	4
p_i	0.15	0.25	0.30	0.20	0.10

eloszlást követi. Számolja ki X várható értékét! Felhasználva, hogy az $X = i$ esemény relatív gyakorisága – nagy kísérletszám esetén – közel van a p_i valószínűséghez, írja le annak a vázlatos bizonyítását, hogy sok rigófészket megfigyelve a tojások számának az átlaga közel van a várható értékhez!

Megoldás:

$$\mathrm{E}(X) \;=\; 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.30 + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.10 \;=\; 1.85$$

1 pont

$N =$ a megfigyelt rigófészkek száma. $N_i =$ ahány fészekben i darab tojás van ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). Ekkor a tojások számának az átlaga:

$$\frac{\sum_{i=0}^{4} N_i \cdot i}{N} \;=\; \sum_{i=0}^{4} \frac{N_i}{N} \cdot i \;\approx\; \sum_{i=0}^{4} p_i \cdot i \;=\; \mathrm{E}(X)$$

6 pont

2. A fagylaltos nap mint nap dél és 5 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a strandra, 1 órán át árulja portékáját, aztán elmegy. Mi a valószínűsége, hogy összefutok a fagyissal, ha én

(a) 2 -kor érkezem, és 1.5 órát töltök ott?

Világosan kell tálalni, hogy az Ön megoldásában mi az eseménytér, és azon belül mi a kedvező kimenetelek halmaza, mert az értékelésnél ez sokat számít!

Megoldás: Az eseményteret a a fagyis lehetséges érkezési időpontjai alkotják, vagyis az eseménytér a $[0, 5]$ intervallum. Kedvező egy $t \in [0, 5]$ időpont, ha a $[t, t + 1]$ intervallumnak van közös pontja a $[2, 3.5]$ intervallummal, azaz $t \in [1, 3.5]$. A kérdezett valószínűség = az $[1, 3.5]$ hossza per a $[0, 5]$ hossza, azaz $2.5/5 = \frac{1}{2}$.

4 pont

(b) a fagyistól függetlenül egyenletes eloszlás szerint érkezem 2 és 3 között, és 1.5 órát töltök ott?

Világosan kell tálalni, hogy az Ön megoldásában mi az eseménytér, és azon belül mi a kedvező kimenetelek halmaza, mert az értékelésnél ez sokat számít!

Megoldás: A fagyis érkezési időpontja φ, az enyém η. Az eseménytér a (φ, η) párokból álló $[0, 5] \times [2, 3]$ téglalap. Egy (φ, η) pont pontosan akkor tartozik a kedvező kimenetelekhez, ha a $[\varphi, \varphi + 1]$ intervallumnak van közös pontja az $[\eta, \eta + 1.5]$ intervallummal, azaz ha teljesül az alábbi két egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} 2 \leq \quad & \eta \quad \leq 3 \\ \eta - 1 \leq \quad & \varphi \quad \leq \eta + 1.5 \end{aligned}$$

A kérdezett valószínűség = az iménti egyenlőtlenségekkel meghatározott parallelogramma területe osztva a $[0, 5] \times [2, 3]$ téglalap területével: $2.5/5 = \frac{1}{2}$.

6 pont

3. A nikkel bolhák, amikor forró fémlapra helyezik őket, ugranak egyet, és már végük is van. Az X valószínűségi változó jelentse azt, amekkorát ilyenkor egy nikkel bolha ugrik (méterben mérve).

(a) Ha Önnek lenne 800 nikkel bolhája, hogyan ellenőrizné, hogy X rendelkezik-e az örökifjú tulajdonásággal? Írja le, hogy a mindennapi gyakorlatban kísérleti eredményekből relatív gyakoriságokkal hogyan lehet az örökifjú tulajdonáságot – ha csak többé-kevésbé is, de mégis valamennyire – ellenőrizni!

Megoldás: Választok egy s és egy t értéket, pl. $s = 2$ méter és $t = 0.5$ méter, és megnézem, hogy

- a bolhák hányadrésze ugrik nagyobbat t -nél,

és azt is, hogy

- az s-nél nagyobbat ugró bolhák hányad része ugrik nagyobbat $s + t$ -nél.

Ha ez a két arány közel van egymáshoz, akkor erre az s, t értékpárra X örökifjú tulajdonáságúnak tűnik. Ha még néhány vagy inkább kellően sok s, t értékpárra X örökifjúnak tűnik, akkor elfogadom az örökifjú tulajdonságot.

5 pont

(b) Tegyük fel, hogy a kísérlet azt adja, hogy X rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

(b1) Vezesse le az örökifjú tulaldonságból, hogy X jobboldali eloszlásfügvénye eleget tesz a

$$T(s + t) = T(s)T(t)$$

egyenletnek!

Megoldás: Az örökifjú tulajdonság szerint

$$\mathrm{P}(\ X > s + t \mid X > s\ ) = \mathrm{P}(\ X > t\ )$$

azaz

$$\frac{\mathrm{P}(\ X > s + t)}{\mathrm{P}(\ X > s)} = \mathrm{P}(\ X > t\ )$$

ahonnan átszorzással

$$\mathrm{P}(\ X > s + t) = \mathrm{P}(\ X > s)\,\mathrm{P}(\ X > t\ )$$

vagyis

$$T(s+t) = T(s)T(t)$$

3 pont

(b2) Mutassa meg, hogy az exponenciális eloszlás jobboldali eloszlásfüggvénye is eleget tesz a

$$T(s+t) = T(s)T(t)$$

egyenletnek!

Megoldás: Közismert, hogy

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$$

Az exponenciális eloszlás jobboldali eloszlásfüggvénye

$$T(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Ezek alapján

$$T(s+t) = \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} = \mathrm{e}^{-\lambda s - \lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{e}^{-\lambda t} = T(s)T(t)$$

2 pont

4. Azon túl, hogy a bolhák ugrásainak a nagysága exponenciális eloszlást követ, tegyük fel még azt is, hogy a bolháknak kb. a fele ugrik nagyobbat, mint 3.5 méter. Kb. mennyi a 800 ugrás nagyságának

(a) az átlaga?

Megoldás: A megadott információ szerint $\mathrm{P}(X > 3.5)$ valószínűséget 0.5 -nek vesszük. Ezért $T(3.5) = 0.5$, vagyis

$$\mathrm{e}^{-\lambda\, 3.5} = 0.5$$

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{3.5}$$

3 pont

A nagy számok törvénye szerint a kísérleti eredmények átlaga a várható értéket közelíti. Exponenciális eloszlás esetén a várható érték (amit integrálással ki is lehet számolni) $\frac{1}{\lambda}$. Ezért a válasz a kérdésre:

$$\frac{3.5}{\ln(2)}$$

3 pont

(b) négyzetének az átlaga?

Vagy számolja ki a kérdezett értékeket, vagy – ha tudja fejből a megfelelő képletet, dicsekedjen vele, és – adja meg a megfelelő magyarázatot!

Megoldás: A nagy számok törvénye szerint a kísérleti eredmények négyzetének az átlaga a második momentumot közelíti. Exponenciális eloszlás esetén a második momentum (amit integrálással ki is lehet számolni) $\frac{2}{\lambda^2}$. Ezért a válasz a kérdésre:

$$2\left(\frac{3.5}{\ln(2)}\right)^2$$

4 pont

5. Számítógéppel generálok két független, 0 és 1 között egyenletes eloszlást követő RND_1, RND_2 random számot. A másodikból köbgyököt vonok, így kapom Y -t:

$$Y = (\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}$$

Ezek után Y -t megszorzom az elsővel, így kapom X -et:

$$X = Y\,\mathrm{RND}_1$$

(a) Határozza meg (X, Y) sűrűségfüggvényét!

Megoldás: Y eloszlásfüggvénye:

$$F_2(y) = \mathrm{P}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}} < y\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2 < y^3\right) = y^3 \qquad (0 < y < 1)$$

Y sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = 3y^2 \qquad (0 < y < 1)$$

X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y < 1)$$

(X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = f_2(y) f_{1|2}(x|y) = 3y^2 \frac{1}{y} = 3y \qquad (0 < x < y < 1)$$

5 pont

(b) Határozza meg az X és Y közötti kovarianciát!

Megoldás:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{RND}_1\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\right) = \int_0^1 y \cdot 3y^2 \, dy = \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{RND}_1 \cdot (\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{RND}_1\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{2}{3}} \right) = \int_0^1 y^{\frac{2}{3}}\ dy = \frac{3}{5}$$

Végül a kovariancia

$$\mathrm{COV}\,(X,Y) = \mathrm{E}\,(XY) - \mathrm{E}\,(X)\,\mathrm{E}\,(Y) = \frac{3}{10} - \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{160}$$

5 pont

6. Tegyük fel, hogy (X,Y) sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 3y \quad (0 < x < y < 1)$. Milyen függvénnyel tippeljünk X -ből Y -ra, ha az a cél, hogy

(a) a hiba négyzetének a várható értéke minimális legyen?

Megoldás: X sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_x^1 3y\ dy = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 \qquad (0 < x < 1)$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{3y}{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2} = \frac{2y}{1 - x^2} \qquad (0 < x < y < 1)$$

Y feltételes várható értéke az $X = x$ feltétel mellett:

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_x^1 \frac{2y^2}{1 - x^2}\ dy = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^3}{1 - x^2}$$

A legjobb tippeléshez használandó függvény:

$$k(x) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^3}{1 - x^2}$$

5 pont

(b) a hiba abszolút értékének a várható értéke minimális legyen?

Megoldás:
Y feltételes eloszlásfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$F_{2|1}(y|x) = \int_x^y \frac{2y}{1 - x^2}\ dy = \frac{y^2 - x^2}{1 - x^2}$$

A feltételes medián meghatározásához az egyenlet:

$$\frac{y^2 - x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{2}$$

Az egyenlet megoldása y -ra:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2}$$

A legjobb tippeléshez használandó függvény:

$$k(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2}$$

5 pont