3. vizsga, 2017-01-16, Megoldásokkal

1. Én és barátom felváltva dobunk kosárra addig, ameddig valamelyikünknek sikerül bedobni a labdát. Én minden dobásomnál 0.4 valószínűséggel találok be, barátom 0.6 -tal. Dobásaink függetlenek. Én kezdek. **(a)** Mi a valószínűsége, hogy én nyerek? *(Ha a kért valószínűséget korrekt szumma alakjában adja meg, akkor megoldása 4 pontot ér, ha a szummát helyes tört alakra is hozza, akkor 5 pont jár.)* **(b)** Mi a valószínűsége, hogy úgy nyerek, hogy legfeljebb hármat dobok? *(Elég ha valószínűséget korrekt szumma alakjában adja meg.)*

   Megoldás (a): Az összegzési és szorzási szabályok alkalmazásával:

$$\mathbb{P}(\text{én nyerek}) = 0.4 + (0.6 \cdot 0.4) \cdot 0.4 + (0.6 \cdot 0.4)^2 \cdot 0.4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (0.6 \cdot 0.4)^k \cdot 0.4 = \frac{10}{19}$$

   Megoldás (b): A válasz az előző összeg első három tagjának az összege:

$$0.4 + (0.6 \cdot 0.4) \cdot 0.4 + (0.6 \cdot 0.4)^2 \cdot 0.4$$

2. **(a)** Határozza meg az alábbi két eloszlás konvolúcióját! *(Itt a számolási hiba is HIBA!)*

x	0	1	2	3
$p_1(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

y	0	1	2
$p_2(y)$	0.5	0.3	0.2

   (b) Két valószínűségi változó esetén, milyen feltételek mellett és mire ad helyes választ a két változó eloszlásának konvolúciója?

   Megoldás (a): A síkbeli eloszlás tagjai – a függetlenség miatt – szorzatként adódnak:

2	$\frac{2}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{8}{100}$
1	$\frac{3}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{12}{100}$
0	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{20}{100}$
	0	1	2	3

   A konvolúció tagjai összegzéssel adódnak:

z	0	1	2	3	4	5
$p(z)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3+10}{100} = \frac{13}{100}$	$\frac{2+6+15}{100} = \frac{23}{100}$	$\frac{4+9+20}{100} = \frac{33}{100}$	$\frac{6+12}{100} = \frac{18}{100}$	$\frac{8}{100}$

   Megoldás (b): Független valószínűségi változók összegének az eloszlása egyenlő a tagok eloszlásainak konvolúciójával.

3. Tekintünk egy egységsugarú kört, és annak egy érintőjét. Az érintőből számegyenest csinálunk: az origó az érintési pont, az egység pedig a kör sugara. A kör kerületén vett egyenletes eloszlást merőlegesen vetítjük az érintőjére. Az **(a)** Vezesse le az X -szel jelölt vetületpont eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének a képletét! *(A levezetéshez használt ábra legyen szép és jól érthető!)* **(b)** Két életből vett példát is tanultunk, ahol az (a) részben leírt probléma felbukkan. Vázolja ezek közül az egyiket egy-két mondatban!

   Megoldás (a) és (b): Az ábrát, a levezetést és két példát lásd a jegyzet 2. részének "Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások" című fejezetében

4. **(a)** Mondja ki a Moivre-Laplace tételt! *(Világosan fogalmazza meg, hogy a tétel alapján **milyen feltételek mellett, mit, mivel** közelíthetünk!)* **(b)** Szemléltesse a Moivre-Laplace tétel állítását egy gondosan készített ábrával és megfelelő magyarázattal! *(A fontos dolgok legyenek tisztán lerajzolva, érthetően bejelölve, megnevezve, beskálázva!)*

   Megoldás (a) és (b): Az állítást és az ábrát lást jegyzet 2. részének "Moivre-Laplace tétel" című fejezetében

5. Éva csak szedi, szedi az almákat a fáról, és adogatja Ádámnak. Ádám először megméri az átmérőjüket, aztán a súlyukat. Feltételezzük, hogy az átmérő és a súly kétdimenziós normális eloszlást követ. Az átmérő várható értéke 10, szórása 1 cm. A súly várható értéke 20, szórása 2 dkg. A korrelációs együttható 0.8. **(a)** Hány almát kell leszedni ahhoz, hogy azoknak az átlagsúlya legalább 0.96 valószínűséggel 19.9 és 20.1 dkg között legyen? **(b)** Ha Ádám egy szép piros almán éppen 12 cm átmérőt mért, akkor vajon mekkora ennek az almának a súlya? Tippeljen úgy, ahogy akkor kell tippelni, amikor a hiba négyzetének a várható értékét minimálizáljuk!

   Megoldás (a): Egy leszedett almára vonatkozólag legyen X az alma súlya dkg-ban, Y pedig az alma átmérője cm-ben. A feladat szövege alapján (X, Y) együttes eloszlása kétdimenziós normális az adott paraméterekkel. Az (a) feladatrész csak egydimenziós probléma: azt kell csak felhasználni, hogy X normális eloszlást követ 20 várható értékkel és 2 szórással. n darab leszedett alma átlagát jelöljük $\bar{X}_n$ -nel. Ennek eloszlása normális 20 várható értékkel és $2/\sqrt{n}$ szórással. Így

$$\mathbb{P}(19.9 < \bar{X}_n < 20.1) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) - 1.$$

   Ez a valószínűség akkor legalább 0.96, ha $\Phi(\frac{0.1\cdot\sqrt{n}}{2}) \geq 0.98$, vagyis $\frac{0.1\cdot\sqrt{n}}{2} \geq 2$. Így 1600 vagy több leszedett alma esetén teljesül a kívánt feltétel.

   Megoldás (b): Mint tanultuk:

   - a legjobb tipp az $\mathbb{E}(X|Y = 12)$ feltételes várható érték
   - az $Y = y$ feltétel mellett X eloszlása normális
   - melynek a várható értéke $m_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$

   Így

$$\mathbb{E}(X|Y = 12) = 23.2$$

6. RND_1 és RND_2 független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlást követő véletlen számok. Legyen $X = \text{RND}_1$ és $Y = \text{RND}_1^2 \cdot \text{RND}_2$. Határozza meg **(a)** X és Y várható értékét, **(b)** az X és Y közötti kovarianciát!

   Megoldás (a): A megoldás több helyen felhasználja a valószínűségi változó függvényének várható értékéről szóló képletet (lásd: 2. rész 1. fejezet).

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\text{RND}_1^2 \cdot \text{RND}_2) \overset{\text{függetlenség}}{=} \mathbb{E}(\text{RND}_1^2) \cdot \mathbb{E}(\text{RND}_2) = \left(\int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

   Megoldás (b):

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\text{RND}_1^3 \cdot \text{RND}_2) \overset{\text{függetlenség}}{=} \mathbb{E}(\text{RND}_1^3) \cdot \mathbb{E}(\text{RND}_2) = \left(\int_0^1 x^3 \cdot 1\, dx\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{COV}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{24}$$