4. vizsga, 2017-01-23, MEGOLDÁS

1. (a) Mikor mondjuk azt, hogy az A és B események függetlenek egymástól? *(Mondja ki a definíciót!)*

Megoldás: Lásd jegyzet 1. rész, 6.1 "Események függetlensége" című alfejezet. (3 pont)

(b) Mikor mondjuk azt, hogy az A, B,C események függetlenek egymástól, vagy – más kifejezéssel élve – A, B,C események független rendszert alkotnak? *(Mondja ki a definíciót!)*

Megoldás: Lásd jegyzet 1. rész, 6.1 "Események függetlensége" című alfejezet. (4 pont)

(c) Igaz-e, hogy ha három esemény közül bármelyik kettő független egymástól, akkor a három esemény független rendszert alkot? *(Ha igen, bizonyítsa be! Ha nem, adjon ellenpéldát, és a szükséges tényeket igazolja!)*

Megoldás: Nem igaz. Az ellenpéldát lásd jegyzet 1. rész, 6.5. "Gyakorló feladatok", 3. feladat: "*Példa páronként független, de összességében nem független eseményekre*":

- $A =$ 10 forintos érme fejet ad
- $B =$ 20 forintos érme fejet ad
- $C =$ mindkét érmével írást dobok vagy mindkét érmével fejet dobok

A és B nyilván függetlenek egymástól, és

- A és C függetlenek, hiszen $\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(C)$,
- B és C függetlenek, hiszen $\mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$,
- de A és B és C nem függetlenek, hiszen $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C)$

2. X és Y függetlenek, és eloszlásaik:

x	0	10	20	30
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

illetve

y	10	20	30	40
$p(y)$	0.1	0.2	0.3	0.4

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y > X$? *(Itt a számolási hiba is HIBA!)*

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{y \in \{10,20,30,40\}} \mathbb{P}(X < y \ \wedge \ Y = y) \\
&= \sum_{y \in \{10,20,30,40\}} \mathbb{P}(X < y) \cdot \mathbb{P}(Y = y) \\
&= (0.1) \cdot 0.1 + (0.1 + 0.2) \cdot 0.2 + (0.1 + 0.2 + 0.3) \cdot 0.3 + (0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4) \cdot 0.4 \ = \ 0.65
\end{aligned}$$

(b) Mennyi X , Y és $X + Y$ szórása?
(Itt a számolási hiba is HIBA! Segítség: ha jól számol, "szép" eredmények jönnek ki.)

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= 0 \cdot 0.1 + 10 \cdot 0.2 + 20 \cdot 0.3 + 30 \cdot 0.4 \ = \ 20 \\
\mathbf{E}(X^2) &= 0^2 \cdot 0.1 + 10^2 \cdot 0.2 + 20^2 \cdot 0.3 + 30^2 \cdot 0.4 \ = \ 500 \\
\mathbf{SD}(X) &= \sqrt{\mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2} \ = \ \sqrt{500 - 20^2} \ = \ 10 \\
\mathbf{SD}(Y) &= \ = \ \mathbf{SD}(X + 10) \ = \ \mathbf{SD}(X) \ = \ 10 \\
\mathbf{SD}(X + Y) &= \sqrt{\mathbf{SD}^2(X) + \mathbf{SD}^2(Y)} \ = \ \sqrt{10^2 + 10^2} \ = \ \sqrt{200} \ \approx \ 14.1
\end{aligned}$$

3. Két gejzírt (egy kisebbet és egy nagyobbat) rendszeresen megfigyelünk Izlandon. A percekben mért várakozási idők a kitörésükig, amiket X és Y jelöl, függetlenek, és mindketten 0.1 paraméterű exponenciális eloszlást követnek. **(a)** Határozza meg az $X < 2 \cdot Y$ esemény valószínűségét! **(b)** Határozza meg $Z = 2 \cdot Y - X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a képletét! *(Ha a válaszokat korrekt integrálokkal megadja, de nem számolja ki, akkor csak 1-1 pontot veszít. Egy-egy jó ábra sokat segíthet!)*

Megoldás: Mivel az (a) és (b) rész megoldásában csak az alábbi integrálra van szükség, előre bocsátjuk, hogy

$$\int_{y=s}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y} \, \mathrm{d}y \;=\; \left[-e^{-\lambda \cdot y}\right]_{y=s}^{\infty} \;=\; e^{-\lambda \cdot s}$$

(X, Y) sűrűségfüggvénye a függetlenség miatt szorzatként adódik:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 0.1 \cdot e^{-0.1 \cdot x} \cdot 0.1 \cdot e^{-0.1 \cdot y} & \text{ha } 0 \le x \text{ és } 0 \le y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás (a):

$$\mathbb{P}\left(X < 2 \cdot Y\right) \;=\; \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=\frac{x}{2}}^{\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{3}$$

Megoldás (b):

$$R(z) \;=\; \mathbb{P}\left(Z < z\right) \;=\; \mathbb{P}\left(2 \cdot Y - X < z\right) \;=\; \mathbb{P}\left(Y < \frac{z+X}{2}\right)$$

$$\text{ha } 0 \le z, \text{ akkor} \;=\; \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\frac{z+x}{2}} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \;=\; 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{-z}{20}}$$

$$\text{ha } z < 0, \text{ akkor} \;=\; \int_{x=-z}^{\infty} \int_{y=0}^{\frac{z+x}{2}} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{z}{10}}$$

4. Felmegy a legény fára, a meggyfa tetjére. Lerázza a meggyet, aztán ... a babája (válogatás nélkül) száz szemet szed a fedeles kosarába. A meggyszemek súlya – egymástól függetlenül – egyenletes eloszlást követ 2 dkg és 4 dkg között. **(a)** Mi a valószínűsége, hogy a kosár nettó súlya meghaladja a 3.05 kg -ot? *(Használja a normális eloszlás lentebbi táblázatát!)*

Megoldás: Az i-edik meggy súlya dkg-ban mérve legyen X_i, aminek eloszlása a $[2, 4]$ intervallumon egyenletes, így $\mathbf{E}(X_i) = \mu = \frac{2+4}{2} = 3$ és $\mathbf{SD}(X_i) = \sigma = \frac{4-2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Namármost, a CHT miatt:

$$\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_{100} > 305) = \mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100\mu}{\sqrt{100}\sigma} > \frac{305-300}{\sqrt{100}/\sqrt{3}}\right)$$

$$1 - \Phi(\sqrt{3}/2) \;\approx 1 - \Phi(0.87) \approx 1 - 0.81 = 0.19\,.$$

(b) Bár a meggyszemek súlya egyenletes eloszlást követ, mégis normális eloszlással lehetett az (a) részben számolni. Miért? *(Korrekt, tiszta választ kérünk.)*

Megoldás: A Centrális határeloszlás tételt használtuk: sok (100 db) független, kis szórású ($\frac{1}{\sqrt{100}}$) valószínűségi változó összege közelítőleg normális eloszlású.

5. Legyen $X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$ és $Y = \mathrm{RND}_1$. Határozza meg **(a)** X és Y várható értékét, és **(b)** az X és közötti Y kovarianciát!

Megoldás: Lásd jegyzet 3. rész, 19.2 "Számolós példa".

6. Amikor az (x, y) -síkon tekintett $f(x, y)$ sűrűségfüggvényű eloszlást az (u, v) -síkra transzformáljuk az

$$u = \mathbf{u}(x,y), \qquad v = \mathbf{v}(x,y)$$

képletpár által definiált t transzformációval (a szükséges folytonossági, differenciálhatósági és invertálhatósági feltételek mellett), akkor fontos szerepe van egy bizonyos Jacobi mátrixnak. **(a)** Írja fel ezt a bizonyos Jacobi mátrixot a megfelelő parciális deriváltakkal! **(b)** Írja fel azt a képletet, ahogy az (u, v) -síkon kapott eloszlás $s(u, v)$ sűrűségfüggvényét az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényből és a megfelelő Jacobi determinánsból elő lehet állítani! *(Korrekt, jól érthető képleteket kérünk! A t transzformáció inverzét a szokásoknak megfelelően jelölje t^{-1}, a t^{-1} -nek megfelelő képletpár tagjait pedig $x = \boldsymbol{x}(u, v)$, $y = \boldsymbol{y}(u, v)$.)*

Megoldás: Lásd jegyzet 3. rész, 4. fejezet: "Transzformáció síkról síkra".