Valószínűségszámítás – FELADATOK

készülő példatár

Vetier András

2016. május 27.

Tartalomjegyzék

1. Lehetséges kimenetelek

Az alábbi véletlen jelenségek megnevezett megfigyelésével kapcsolatban adjuk meg az eseményteret, azaz soroljuk fel a lehetséges kimeneteleket (más néven: elemi eseményeket). Minden esetben állapítsuk meg, hogy hány elemű az eseménytér?

1. a) Két szabályos érmével dobunk,
   b) Három szabályos érmével dobunk,
   c) Négy szabályos érmével dobunk,
   d) Öt szabályos érmével dobunk,
   e) Tíz szabályos érmével dobunk,

   és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal van felül.
2. a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
   b) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
   c) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,

   és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
3. a) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk,
   b) Addig dobunk szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk,
   c) Addig dobunk szabályos érmével, amíg harmadszorra fejet kapunk,

   és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk írást.
4. a) Két szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
   b) Három szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,
   c) Négy szabályos dobókockával dobunk,
   d) Öt szabályos (különböző színű) dobókockával dobunk,

   és megfigyeljük mindegyik kockán, hogy melyik szám van felül.
5. a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
   b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
   c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,

   és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.
6. a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk,
   b) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk,
   c) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk,

   és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk hattól különböző számot.

2. Kombinatórika

1. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
2. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?
3. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)
4. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet egyfajtából többet is venni?
5. Van 6 lányismerősöm, és kettőt el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?
6. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár- és 3 titkárnő-jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?
7. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

3. Klasszikus képlet

1. Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?
2. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?
3. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?
4. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?
5. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?
6. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?
7. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?
8. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?
9. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón (90-ből 5 számot húznak, sorrend nem számít) pontosan két találatunk lesz? És hogy legalább két találatunk lesz?
10. Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki?
11. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?
12. Mi a valószínűbb: 6 kockadobásból legalább egyszer hatost dobni, vagy 12 kockadobásból legalább 2-szer hatost dobni?

4. Feltételes valószínűség

1. Egy szabályos kockával dobunk. Barátom látja a dobás eredményét, de én nem. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobtunk,
   a) ha barátomtól tudom, hogy párosat dobtunk?
   b) És ha azt tudom, hogy legalább 3-ast dobtunk?
   c) És ha azt tudom, hogy legfeljebb 5-öst dobtunk?
2. Feldobunk két kockát.
   a) Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk?
   b) Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6?
3. Tegyük fel, hogy azonos eséllyel szülnek az anyák lányt vagy fiút. Tekinsünk egy véletlenszerűen választott háromgyerekes családot. Ha megtudjuk, hogy a családban van fiú, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy
   a) pontosan egy fiú van a családban?
   b) pontosan két fiú van a családban?
   c) pontosan három fiú van a családban?
4. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, mind a négy színből öt. Én is és barátom is kap 5 lapot.
   a) Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?
   b) Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje, ha nekem 3 zöldem és 2 pirosam van?
5. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	A_1
Lány	40	80	120	A_2
Tanár	10	20	30	A_3
Összesen	100	160	260	
Esemény	B_1	B_2		

   a) Véletlenszerűen kihúzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy: i) fiúé? ii) betegé? iii) beteg fiúé?
   b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?
   c) Az orvos szorgos asszistense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?
   d) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?

5. Szorzási szabály

1. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha húzás után a golyókat
   a) visszatesszük
   b) nem tesszük vissza?

2. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodszorra már csak a 40%, harmadszorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány
   a) átvészeli a teljes eljárást?
   b) az utolsó irtáskor pusztul el?
   c) túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?
3. Egy dobozban 16 alkatrész közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett alkatrész működőképes?
4. Egy valszámvizsgán 30 tétel van. Ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy
   a) csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt?
   b) mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!)
   c) egyik sem húz ilyen tételt?
5. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe.
   a) Mi a valószínűsége annak, hogy ezek után az első dobozban 3 piros golyó lesz?
   b) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros és a második kék?
   c) Mi a valószínűsége annak, hogy az első golyó piros volt, ha a második kék?
6. Van két dobozunk. Az egyik dobozban 3 piros és 2 kék golyó van, a másikban 2 piros és 4 kék. Az első dobozból átrakunk egy golyót a másik dobozba, majd onnan átrakunk egyet az elsőbe, majd az első dobozból ismét egyet a másikba. Találjon ki olyan kérdéseket, melyek golyók színével kapcsolatosak, és feltételes valószínűségekkel megválaszolhatók!

6. Teljes valószínűség tétele

1. Egy suli tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a lányok 85%-a, a fiúk 90%-a megy át. A hallgatóságnak kb. hány százaléka megy át az első vizsgán?
2. Két szabályos dobókockával dobunk, és megnézzük a dobott számok különbségét (ami egy 0 és 5 közötti szám). Amennyi a dobott számok különbsége, annyi szabályos érmével dobunk. (Tehát az is lehet, hogy 0 darab érmével dobunk.) Mi a valószínűsége annak, hogy az érmékkel pontosan 4 fejet kapunk?
3. Első lépés: három tízforintos érmével dobunk, és megnézzük, hány fejet kapunk. Második lépés: ahány fejet kaptunk az első lépésben, annyi húszforintos érmével dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a húszforintos érmékkel pontosan 2 fejet kapunk,
   a) ha nem tudjuk, hogy a tízforintos érmékkel mi jött ki?
   b) ha tudjuk, hogy a tízforintos érmékkel legalább 2 fejet kaptunk?

7. Bayes tétel

1. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?

2. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást zajok zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.

   a) Kaptunk egy 0-t. Mi a valószínűsége, hogy ezt 0-ként is adták le?

   b) Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?

3. Tegyük fel, hogy egy bizonyos betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy vérvizsgálattal lehet kimutatni. A vizsgálat sajnos tévedhet mindkét irányban: beteg emberek esetén csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat betegnek jelzi, egészséges embereket pedig csak 0.8 a valószínűsége, hogy egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég vizsgálták, és a vizsgálat betegnek jelezte. Nyugtassuk meg barátomat, hogy nem kell megijednie: a vizsgálat eredményének ismeretében sem túl valószínű, hogy a kérdéses betegségben szenved.

8. Függetlenség

1. Tegyük fel, hogy az év egy bizonyos napján Budapesten, New York-ban és Tokioban minden nap egymástól függetlenül esik az eső 0.6, 0.8, 0.5 valószínűségekkel, illetve nem esik 0.4, 0.2, 0.5 valószínűségekkel. Esőzés szempontjából a három városban 8 féle variáció lehetséges. Sorolja fel ezt a 8 variációt, és mind a 8 variácónak adja meg a valószínűségét!

2. *(Az előző feladat folytatása)*
   Hogyan egyszerűsödik az előző feladatban a számítás, ha az eső valószínűsége mindhárom városban ugyanannyi?

3. *(Példa páronként független, de összességében nem független eseményekre)*
   Egy 10 és egy 20 forintos érmével dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:

   - $A =$ 10 forintos érme fejet ad
   - $B =$ 20 forintos érme fejet ad
   - $C =$ mindkét érmével írást dobok vagy mindkét érmével fejet dobok

   A és B nyilván függetlenek egymástól. Mutassuk meg, hogy

   a) A és C függetlenek.

   b) B és C függetlenek.

   c) A és B és C nem függetlenek.

4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket:

   - $A =$ a dobott számok összege 7
   - $B =$ legalább az egyik kockán van hatos
   - $C =$ mindkét kockával páratlant dobok
   - $D =$ a két kockával különböző számokat dobok
   - $E =$ a zöld kockával 4-est dobok

   Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

   a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?

   b) Kizáróak-e az A és C események?

   c) Mennyi a B esemény valószínűsége?

d) Hogy viszonul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?

f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek

i. függetlenek, de nem kizáróak,

ii. kizáróak, de nem függetlenek.

9. Vegyes feladatok

1. Állíthatunk-e valami okosat P(A) és P(B) viszonyáról, ha tudjuk, hogy

   a) B maga után vonja az A-t?

   b) A és B kizárják egymást?

2. Egy szabályos dobódockát addig dobálok, amíg végre kijön az első hatos. Megfigyelem, hogy ehhez hány dobás kell.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma pontosan 5?

   b) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma kevesebb, mint 5?

   c) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma több, mint 5?

   d) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma több mint 5, de kevesebb, mint 15?

3. Egy szabályos dobódockát addig dobálok, amíg végre kijön az első hatos. Megfigyelem, hogy ehhez hány dobás kell.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma végtelen, vagyis soha nem kapok hatost?

   b) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma 3-mal osztható 20-nál kisebb szám?

   c) Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások száma 3-mal osztható?

4. Egy pakli francia kártyát (azaz 52 lapot, melyek között 4 ász van) véletlenszerűen négy játékosnak osztunk ki úgy, hogy mindenki kap 13-13 lapot. Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jutott ász?

5. Egy diák három záróvizsgájára készül. Az első júniusban lesz, és ezen 90%-os eséllyel megy át. Ha ezen átment, akkor júliusban próbálhatja meg a második vizsgát, amely 80 % eséllyel lesz sikeres. Ha ezen is átment, akkor szeptemberben megy a harmadik vizsgára, ahol már csak 70% eséllyel megy át. Ellenben ha bármelyik vizsgája sikertelen, akkor csak egy év múlva lehet újra próbálkozni

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy az első évben átmegy mindhárom vizsgán?

   b) Feltéve, hogy nem sikerült az első évben letenni a vizsgákat, mi a valószínűsége, hogy a második vizsgája volt sikertelen?

6. Az A dobókockának 4 piros és 2 fehér oldala van, a B kockának pedig 2 piros és 4 fehér. Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, akkor a továbbiakban mindig az A kockával játszunk; ha írás, akkor pedig mindig a B kockával.

   a) Mutassa meg, hogy a piros dobásának valószínűsége mindig $\frac{1}{2}$.

   b) Ha az első két dobás piros, mi a valószínűsége, hogy a harmadik is piros?

   c) Ha az első három dobás piros, akkor mi a valószínűsége, hogy az A kockát használjuk? (Csak a kocka felső lapját látjuk, a kocka többi oldalát nem.)

7. Egy dobozban 4 cédula van, három piros és egy kék. Kihúzunk egy cédulát, majd visszatesszük még három ugyanolyan színűvel együtt. Ezután ismét húzunk egy cédulát. Mi a valószínűsége annak, hogy

   a) egyforma színű cédulákat húzunk?

   b) pirosakat húzunk, feltéve, hogy egyforma színű cédulákat húzunk?

8. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Feltehető, hogy $1/2$ valószínűséggel jelentkezik hamarabb A B-nél, és fordítva. Mi a valószínűsége, hogy

   a) az első üzletkötés kedvező lesz?

   b) mindkét üzletkötés javunkra válik?

   c) lesz köztük rossz és jó üzlet is?

9. Ping-pongban az a nyertes, aki előbb éri el a 11 pontot, de legalább 2 pont különbség kell a nyeréshez (11-10-nél folytatják két pont különbségig). Egy versenyen csak a nyertes kap pénzjutalmat: 1.000.000 Ft-ot. Két azonos képességű játékosnál a döntő szettben $10 - 9$-es állásnál áramszünet lesz, nem lehet folytatni. Mi az igazságos osztozkodás a pénzen?

10. a) Minden héten egy szelvénnyel játszunk az ötös lottón. Hány hétig kell ezt megtennünk, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel legyen legalább kettes találatunk?

   b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két függetlenül kitöltött szelvénnyel játszunk?

   c) Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten legalább kettes találatunk lesz, ha két olyan szelvénnyel játszunk, amelyeken nincsen egyforma szám? (Segítség: A 90 számot ossza háromfelé: 5+5 szám van a szelvényeken, 80 szám pedig nincs egyiken sem.)

11. Egy dobókockát az első hatosig, egy érmét az első fejig dobálunk. Mi a valószínűsége annak, hogy

   a) a kockával pontosan annyit kell dobnunk, mint az érmével?

   b) a kockával többet kell dobnunk, mint az érmével?

12. Kertemben 5 fehér és 7 barna tyúkot tartok. A fehér tyúkok átlagosan 3 naponként, a barnák 4 naponként tojnak egy-egy tojást.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy tyúkjaim 24 óra alatt együttesen is csak egyetlen tojást produkálnak?
   Ma reggel a 12 tyúkból 2 beszökött az üres nyúlketrecbe, és rájuk záródott az ajtó. Mi a valószínűsége annak, hogy

   b) mindkét tyúk barna volt?

   c) az egyik fehér, a másik barna volt?

   d) holnap reggel a nyúlketrecben tojás lesz?

   e) a két tyúk egyike fehér, feltéve, hogy a ketrecben nem találok tojást?

   f) a két tyúk egyike fehér, feltéve, hogy a másik barna, és a ketrecben nem találok tojást?

13. *(Felületes utazó)* Egy utazó az íróasztalában, a nyolc fiók egyikében hagyta az útlevelét. Mielőtt a repülőtérre indulna, kapkodva próbálja megtalálni. A kapkodás miatt $0,1$ valószínűséggel akkor sem veszi észre az útlevelet, ha az éppen megnézett fiókban van.

   a) Mi a valószínűsége, hogy nem találja meg az első 5 fiókban?

   b) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy az útlevél nem is volt ezekben?

   c) Ha nem találta meg az első 5 fiókban, mi a valószínűsége, hogy a hátralévő fiókokban megtalálja?

10. Nevezetes eloszlások

1. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?

   a) Ahányadik autó felvesz fel, amikor kiállok az országútra (mert autóstoppal akarok utazni).

   b) 10 autó közül ahány felvesz stopposokat.

   c) Ahány autó elmegy 5 perc alatt.

   d) Ahány autó elmegy 10 perc alatt.

   e) Ahány pótkocsi nélküli elmegy az első pótkocsis előtt.

f) *** Ahány pótkocsi nélküli elmegy az ötödik pótkocsis előtt.

g) *** Ahányadik autó a harmadik piros.

2. Adja meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását!

   a) Egy érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk fejet.

   b) Egy érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk írást.

   c) Két érmét 15-ször feldobunk, és megnézzük, hogy hányszor kapunk dupla fejet.

   d) Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg végre fejet kapunk, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.

   e) *** Addig dobunk egy szabályos érmével, amíg másodszorra fejet kapunk, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.

   f) *** Addig dobunk két szabályos érmével, amíg harmadszorra kapunk dupla fejet, és megfigyeljük, hány dobás kell ehhez.

3. Adja meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását!

   a) Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg végre hatost kapunk.

   b) *** Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg másodszorra hatost kapunk.

   c) *** Addig dobunk egy szabályos dobókockával, amíg harmadszorra hatost kapunk. és megfigyeljük, hogy addig hányszor dobtunk hattól különböző számot.

4. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, adjuk meg annak a valószínűségét, hogy

   a) 10 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább 1 balkezes van.

   b) 100 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább 2 balkezes van.

   c) 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább 4 balkezes van.

   d) 1000 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább 10 balkezes van.

5. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

   a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

   b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

   c) hány terméket szállított két leállás között?

   d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna?

6. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. Kérdés: $P(X = 7) =?$

7. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van? Hány sajtóhuba a legvalószínűbb a 13. oldalon? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. és a 14. oldalon együtt több, mint két sajtóhuba van?

8. Percenként átlagosan 2 hívás érkezik a tudakozó központba. Mi annak a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:05 között legalább 4 hívás érkezik?

9. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol máskor is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tapasztalat szerint kb. ugyanolyan valószínű, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5 perc alatt pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt?

10. A „Kocogj velünk!” mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

    Megoldás első része

    Ha azt vizsgáljuk, hogy egy kiszemelt versenyzőben, mondjuk a "Futó Botond" nevűben, hány kullancs lesz a verseny után, akkor egy valószínűségi változót kapunk. Mivel a sok kullancs mindeyike - a többitől függetlenül - kis valószínűséggel kerül ebbe a versenyzőbe, ez a a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ valamilyen λ praméterrel. Ezért - a Poisson eloszlás képlete szerint - annak a valószínásége, hogy 1 kullancs kerül

Futó Botondba, $\lambda e^{-\lambda}$. A 2 kullancs valószínásége pedig $\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$. Ha a versenyzők számát N-nel jelöljük, és a valószínűségeket relatív gyakoriságokkal helyettesítjük, akkor az alábbi egyenleteket állíthatjuk fel:

$$\frac{300}{N} = \lambda e^{-\lambda}$$

$$\frac{75}{N} = \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$$

Ezt az egyenletrendszert könnyű megoldani. Először elosztjuk a második egyenletet az elsővel. A kapott új egyenletben a baloldal törtben N-nel, a jobboliban λ-val és $e^{-\lambda}$ -val egyszerűsítve ezt kapjuk:

$$\frac{75}{300} = \frac{\lambda}{2}$$

vagyis

$$\lambda = \frac{150}{300} = 0,5$$

Ezek után az első egyenletből N -re ez jön ki:

$$N = \frac{300}{\lambda e^{-\lambda}} = \frac{300}{0,5\ e^{-0,5}} = 989,2$$

A versenyzők száma természetesen egész szám. Az hogy itt N-re nem egész jött ki, annak a következménye, hogy a kiszemelt versenyzőben az 1, illetve 2 kullancs valószínűségét relatív gyakoriságokkal közelítettük. Ezért a feladatban feltett kérdésre kézenfekvő a közelítő válasz: **Körülbelül 1000 versenyző volt a versenyen**.

***** Megoldás második része**

Az emberben óhatatlanul felmerül a kérdés: vajon mennyire körülbelül a "körülbelül 1000"? A probléma elemzése érdekében kiszámoljuk most, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző esetén

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs

Ha mindenegyes versenyzővel kapcsolatban az 1 kullancs valószínűségét $\frac{300}{1000} = 0.3$-nak vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűségre az 1000 -ed rendű, 0.3 paraméterű binomiális eloszlás szerint Excellel a

```
BINOM.DIST( 300 ; 1000 ; 0.3 ; FALSE )
```

képlet adódik. A valószínűség numerikus értéke 0.027. Azt is kiszámolhatjuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző esetén

pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

Ha mindenegyes versenyzővel kapcsolatban a 2 kullancs valószínűségét $\frac{75}{1000} = 0.075$-nek vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűségre az 1000 -ed rendű, 0.075 paraméterű binomiális eloszlás szerint Excellel a

```
BINOM.DIST( 75 ; 1000 ; 0.075 ; FALSE )
```

képlet adódik. A valószínűség numerikus értéke 0.048. Azt is kiszámoljuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző eset

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

azaz

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs, és
1000-300-75 versenyzőben lesz 0 kullancs vagy 2-nél több kullancs

Ha - úgyanúgy, mint fentebb - mindenegyes versenyzővel kapcsolatban az 1 kullancs valószínűségét $\frac{300}{1000} = 0.3$-nak, a 2 kullancs valószínűségét $\frac{75}{1000} = 0.075$-nek vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűség az 1000 -ed rendű, $(0.3; 0.075)$ paraméterű polinomiális eloszlással adódik:

$$\frac{(1000)!}{(300)!\,(75)!\,(1000-300-75)!}\;(0.3)^{(300)}\;(0.075)^{(75)}\;(1-0.3-0.075)^{(1000-300-75)}$$

(A polinomiális eloszlásról a `2015_osz_gyak_09_fogalmak.pdf` fájl végén lehet olvasni.) A polinomiális eloszlás nincs beépítve az Excelbe, és a polinomiális eloszlás képletében szereplő faktoriálisokat sem tudja az Excel kiszámolni. Viszont a polinomiális eloszlást kétdimenziós normális eloszlással közelíthetjük, aminek eredményeképpen a valószínűségre (hat tizedesjegyre kerekítve) 0.001269 jön ki. Azon, hogy egy nagyon kis valószínűség érték jött ki, nem szabad meglepődni: érezhetően kicsi annak esélye, hogy 1000 versenyző közül

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

Az embernek eszébe jut, hogy elvileg olyan szélsőséges helyzet is lehetne, hogy - mondjuk - csak 375 versenyző indul a versenyen, és a sors úgy hozza, hogy

300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
75 versenyzőben lesz 2 kullancs

Avagy 5000 versenyző esetén sem zárható ki, hogy

300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
75 versenyzőben lesz 2 kullancs
4625 versenyzőben pedig 0 kullancs vagy 2-nél több kullancs

Ezért elbizonytalanodunk, hogy az egyenletrendszerből adódó 989, avagy 1000, amit kerekítéssel kaptunk, vajon tényleg jó közelítése a versenyzők számának? A bizonytalanság eloszlatása céljából elemezzük most a problémát, és megnézzük, hogy különböző N és λ értékek esetén mi a valószínűsége annak, hogy

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

A valószínűségeket (melyeket `2015_osz_gyak_9_fogalmak.pdf` fájl végén látható, a polinomiális eloszlásról szóló Excel képlet segítségével számoltunk ki) táblázatba rendezve adjuk meg. Mivel a valószínűségek értéke nagyon pici, a táblázatban a valószínűségek értékeinek millószorosát (egészekre kerekítve) írtuk be:

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	λ
750	0	0	0	0	0	0	10	1	0	
800	0	0	0	0	0	35	39	0	0	
850	0	0	0	0	2	374	10	0	0	
900	0	0	0	0	96	388	2	0	0	
950	0	0	0	0	833	55	2	0	0	
1000	0	0	0	1	1 294	1	0	0	0	
1050	0	0	0	16	448	0	0	0	0	
1100	0	0	0	125	41	0	0	0	0	
1150	0	0	0	295	1	0	0	0	0	
1200	0	0	0	242	0	0	0	0	0	
1250	0	0	0	77	0	0	0	0	0	
N										

A táblázatból kitűnik, hogy - arányaikat tekintve - "kicsi" és "kicsi" között is nagy a különbség! Annak a valószínűsége, hogy

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

a táblázatban látható értékek közül 1000 versenyző esetén a legnagyobb, és már 950 vagy 1050 versenyző esetén is jóval kisebb, de 900 vagy annál kevesebb, illetve 1100 vagy annál több versenyző esetén sokkal-sokkal kisebb.

Ezért józan, elfogadható következtetésnek tűnik: körülbelül 1000 versenyző indult a versenyen, ahol a "körülbelül" azt jelenti, hogy 950-nél kevesebb vagy 1050-nál több versenyző gyakorlatilag kizárt.

11. További feladatok

1. Adja meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását! Két szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számok
   a) összegét.
   b) különbségét.
2. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?
3. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza lerakva, ebből 30 fehér, 50 vörös. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de a pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?
4. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?
5. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?
6. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
   c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?
   d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszor?
7. Egy szöcske elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra ugrik. 20 ugrás megtétele után
   a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
   b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
   c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti ugrás után a (-3)-ban volt?
8. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom a hallgatóknak. 30 dobás után el kell dönteniük, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznák meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnének?)
9. Valaki minden héten egyetlen ötös lottó szelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább 1/2 legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)
10. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12-nek jön ki, vagyis mindkettővel 6-ost dobunk.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt 12-t dobnánk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?

11. Egy (szabálytalan, hamis) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k-szor kell dobnunk az érmével?

12. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor különbözne ez az előző eredménytől ?

13. Egy dobozban 10 darab cédula van 1-től 10-ig megszámozva. Visszatevés *nélkül* húzunk 2-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a

   a) kisebbiket,
   b) nagyobbikat,

   Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvény

   - táblázatát,
   - képletét!

14. Egy dobozban 10 darab cédula van 1-től 10-ig megszámozva. Visszatevés *nélkül* húzunk 4-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

   a) legkisebbet,
   b) 2-ik legkisebbet,
   c) 3-ik legkisebbet.
   d) legnagyobbat,

   Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvény

   - táblázatát,
   - képletét!

15. *** Egy dobozban N darab cédula van 1-től N-ig megszámozva. Visszatevés *nélkül* húzunk n-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

   a) legkisebbet,
   b) legnagyobbat,
   c) 2-ik legkisebbet,
   d) 3-ik legkisebbet,
   e) s-edik legkisebbet.

   Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvény képletét!

16. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?

17. 100 kulcs közül 2 nyitja az előttünk lévő ajtót. A kipróbált kulcsokat félretesszük. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból bejutunk? És mi a valószínűsége, hogy pontosan n próbálkozásból jutunk be?

18. *Általánosítás:* Egy dobozban A darab piros és B darab fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzok az r-ik pirosig. Adjuk meg a súlyfüggvény képletét! Adja meg a súlyfüggvényt visszatevéses húzás esetén is!

19. Egymás után kérdezgetjük az embereket a születésnapjukról: melyik hónap hányadikán születtek.

   a) Hányadik embernél adódik az első olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!
   b) Hányadik embernél adódik a második olyan születésnap, ami már korábban szerepelt? Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek a képletét!

20. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 250 db szék van.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék, vagyis legfeljebb 250 hallgató megy el az előadásra?
b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?
c) Hány szék kell, hogy legalább 0,99 valószínűséggel jusson mindenkinek szék?

12. Várható érték

1. Egy dobozban 6 cédula van, rajtuk pedig a következő számok:

   a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;$
   b) $1,\ 2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6;$
   c) $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3;$
   d) $1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6;$
   e) $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3;$
   f) $11,\ 11,\ 11,\ 12,\ 12,\ 13;$
   g) $21,\ 21,\ 21,\ 22,\ 22,\ 23;$
   h) $21,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 26;$
   i) $210,\ 220,\ 220,\ 220,\ 220,\ 236;$
   j) $0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6;$
   k) $0.1,\ 0.2,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6;$
   l) $5.1,\ 5.2,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6;$
   m) $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6;$
   n) $-1,\ -2,\ -6,\ -6,\ -6,\ -6;$
   o) $-1,\ -2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3.$

   A fenti esetek mindegyikében véletlenszerűen húzunk a dobozból egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Ezt a számot jelöljük X-szel. Adja meg X eloszlását táblázattal, és számolja ki az eloszlás várható értékét! Képzelje el (még jobb ha ténylegesen vagy szimulációval meg is teszi), hogy X-re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

   $$X_1, X_2, \ldots, X_N.$$

   Körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények

   $$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

   átlaga?

2. Tegyük fel, hogy egy bizonyos országban a családok kb.

   - 15%-ának nincs gyereke
   - 40%-ának 1 gyereke van
   - 30%-ának 2 gyereke van
   - 10%-ának 3 gyereke van
   - 5%-ának pedig 4

   A 4-nél többgyerekes családok olyan ritkák, hogy ezzel a lehetőséggel nem foglalkozunk. Feltesszük, hogy a különböző családokban a gyerekek száma független egymástól. Feltesszük, hogy minden gyerek a többitől függetlenül $0.5 - 0.5$ valószínűségggel születik lánynak vagy fiúnak.

   a) Aja meg a gyerekek számának a várható értékét, vagyis azt, hogy átlagosan kb. hány gyerek van egy családban?
   b) Aja meg a lány-gyerekek számának a várható értékét, vagyis azt, hogy átlagosan kb. hány lány-gyerek van egy családban?
   c) Aja meg a fiú-gyerekek számának a várható értékét, vagyis azt, hogy átlagosan kb. hány fiú-gyerek van egy családban?
   d) Ha egy családról annyit tudunk, hogy van benne gyerek, akkor a gyerekek számának mi az eloszlása?
   e) Ha egy családról annyit tudunk, hogy van benne gyerek, akkor átlagosan kb. hány gyerek van a családban?

13. Második momentum, variancia, szórás

1. Tekintsük a következő diszkrét eloszlásokat:

a)

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.05	0.1	0.1	0.15	0.25	0.35

b)

x	11	12	13	14	15	16
$p(x)$	0.05	0.1	0.1	0.15	0.25	0.35

c)

x	5	10	15	20	25	30
$p(x)$	0.05	0.1	0.1	0.15	0.25	0.35

Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

- a várható értéke?
- a második momentuma?
- a varianciája?
- a szórása?

2. Egy dobozban cédulák vannak. Három cédulán 4-es szám áll, két cédulán 6-os, egy cédulán pedig 7-es. Kihúzunk egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Mennyi a leolvasott szám

- várható értéke?
- második momentuma?
- varianciája?
- szórása?

3. Egy dobozban 5 golyó van: 3 piros és 2 fehér. Visszatevés **nélkül** húzunk addig, amíg végre pirosat húzunk.

a) Adja meg az ehhez szükséges húzások számának eloszlását táblázattal!

b) Átlagosan hány húzás kell az első pirosig?

4. Legyen X a szabályos dobókockával dobott szám értéke. Mennyi X várható értéke, második momentuma, varianciája és szórása?

5. Két szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számok eltérését (különbségük abszolút értékét). Adja meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását, a várható értékét, a második momentumát, a varianciáját és a szórását!

6. Két szabályos dobókockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számok összegét. Adja meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását, a várható értékét, a második momentumát, a varianciáját és a szórását!

7. Két szabályos dobókockával dobunk, egy pirossal és egy fehérrel, és megfigyeljük a dobott piros és fehér szám különbségét. Adja meg ennek a valószínűségi változónak az eloszlását, a várható értékét, a második momentumát, a varianciáját és a szórását!

8. Egy sorsjátékon 1 darab 1.000.000 Ft-os, 10 db 50.000 Ft-os és 100 darab 5.000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40.000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzék meg?

14. Valószínűségi változó függvényének várható értéke, szórása

1. Egy dobozban 6 cédula van, rajtuk pedig a következő számok:

   a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$;
   b) $1,\ 2,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6$;
   c) $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3$;
   d) $1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6$;
   e) $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3$;
   f) $11,\ 11,\ 11,\ 12,\ 12,\ 13$;
   g) $21,\ 21,\ 21,\ 22,\ 22,\ 23$;
   h) $21,\ 22,\ 22,\ 22,\ 22,\ 26$;
   i) $210,\ 220,\ 220,\ 220,\ 220,\ 236$;
   j) $0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6$;
   k) $0.1,\ 0.2,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6,\ 0.6$;
   l) $5.1,\ 5.2,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6,\ 5.6$;
   m) $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6$;
   n) $-1,\ -2,\ -6,\ -6,\ -6,\ -6$;
   o) $-1,\ -2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3$.

   A fenti esetek mindegyikében véletlenszerűen húzunk a dobozból egy cédulát, és leolvassuk a rajta lévő számot. Ezt a számot jelöljük X-szel. Képzelje el (még jobb ha ténylegesen vagy szimulációval meg is teszi), hogy X-re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

   $$X_1, X_2, \ldots, X_N$$

   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

     $$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}$$

     kifejezés értéke? Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számokból álló *adatrendszer második momentum*ának nevezzük. Azt az elméleti értéket, amit Önnek ebben a feladatban meg kell határozni, az X *valószínűségi változó második momentumá*nak (avagy a szóbanforgó *eloszlás második momentumá*nak) nevezzük.
   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek a 2.8-től való távolsága négyzetének az átlaga, vagyis az

     $$\frac{(X_1 - 2.8)^2 + (X_2 - 2.8)^2 + \ldots + (X_N - 2.8)^2}{N}$$

     kifejezésnek az értéke? Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számok 2.8 *-re vonatkozó második momentumá*nak nevezzük. Azt az elméleti értéket, amit Önnek ebben a feladatban meg kell határozni, az X valószínűségi változó 2.8-re vonatkozó második momentumának (avagy a szóbanforgó *eloszlásnak a megadott pontra vonatkozó második momentumá*nak) nevezzük.
   - Becsülje meg,hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma? Azt az elméleti értéket, amit Önnek ebben a feladatban meg kell határozni, az X valószínűségi változó varianciájának, szórásnégyzetének (avagy a szóbanforgó *eloszlás varianciájának, szórásnégyzeté*nek) hívjuk.

2. Tegyük fel, hogy egy bizonyos országban a családok kb.

   - 15%-ának nincs gyereke
   - 40%-ának 1 gyereke van
   - 30%-ának 2 gyereke van
   - 10%-ának 3 gyereke van
   - 5%-ának pedig 4

A 4-nél többgyerekes családok olyan ritkák, hogy ezzel a lehetőséggel nem foglalkozunk. Feltesszük, hogy a különböző családokban a gyerekek száma független egymástól. Feltesszük, hogy minden gyerek a többitől függetlenül $0.5 - 0.5$ valószínűségggel születik lánynak vagy fiúnak.

a) A családi pótlékot az alábbi táblázat szerint kapják a családok:

gyerekek száma	0	1	2	3	4
családi pótlék (*fitying*-ben)	0	5000	25000	30000	35000

Mennyi a családi pótlék várható értéke, vagyis átlagosan kb. hány fitying családi pótlékot kap egy-egy család?

b) És mennyi a családi pótlék várható értéke a gyerekes családokra szorítkozva, vagyis átlagosan hány fitying családi pótlékot kapnak a gyerekes családok?

15. Folytonos eloszlások

1. Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg}(x)$ minden x-re.

   a) Rajzolja le a függvény grafikonját!
   b) Ellenőrizze, hogy az $F(x)$ függvény valóban rendelkezik az eloszlásfüggvények tulajdonságaival!
   c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 0$?
   d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X < 1$?
   e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $0 < X < 1$?
   f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $-1 < X < 1$?
   g) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > \sqrt{3}$?
   h) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 1$ feltéve, hogy $X < \sqrt{3}$?
   i) A grafikonon hol jelentkeznek ezek a valószínűségek?

2. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ minden -1 és 1 közötti x-re, minden más x-re pedig $f(x) = 0$.

   a) Rajzolja le a függvény grafikonját!
   b) Ellenőrizze, hogy az $fx)$ függvény valóban rendelkezik az sűrűségfüggvények tulajdonságaival!
   c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 0$?
   d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $0 < X < \frac{1}{2}$?
   e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}$?
   f) A grafikonon hol jelentkeznek ezek a valószínűségek?

3. Tekinsük a következő valószínűségi változót:

   $$X = \text{amennyi időt (percekben mérve) reggelente várnom kell a villamosra}$$

   Ez a valószínűségi változó elvileg akármilyen nemnegatív értéket felvehet. Tegyük fel, hogy az eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - e^{-x/5}$, ha $x \geq 0$, és $F(x) = 0$ egyébként.

   a) Rajzolja le a függvény grafikonját!
   b) Ellenőrizze, hogy az $F(x)$ függvény valóban rendelkezik az eloszlásfüggvények tulajdonságaival!
   c) Mi valószínűbb? Hogy $X > 5$, vagy hogy $X < 5$?
   d) Találjon olyan c értéket, hogy $P(X > c)$ és $P(X > c)$ egyenlő legyen!
   e) Hol van az az x érték, melyre $P(X > x) = 0,25$?
   f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X < 1,5$?
   g) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $1,5 < X < 5$?
   h) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 1,5$ feltéve, hogy $X < 5$?

i) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 5$ feltéve, hogy $X > 1,5$?

j) A grafikonon hol jelentkeznek ezek a valószínűségek?

k) Ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > a + b$, feltéve, hogy $X > a$? A kapott eredménynek van valami érdekessége. Vegye észre, és fogalmazza meg szavakban!

4. Legyen $X =$ egy véletlenszerűen választott ember testmagassága. X eloszlásfüggvényének néhány (közelítő) értékét táblázatba foglaltuk:

x	F(x)
160	0,09
165	0,16
170	0,25
175	0,37
180	0,50
185	0,63
190	0,75
195	0,84
200	0,91

a) Ezeknek az adatoknak az ismeretében hogyan képzeli el az $F(x)$ függvény grafikonját?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X < 195$?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 195$?

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 180$?

e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 180$ feltéve, hogy $X < 195$?

f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X > 175$ feltéve, hogy $X < 195$?

g) Hol van az az x érték, melyre $P(X > x) = 0,25$?

h) Körülbelül hol lehet az az x érték, melyre $P(X > x) = 0,1$?

5. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 10)$ intervallumon. Mi az X eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

6. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(-10, 10)$ intervallumon. Mi az X eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

7. Egy tüzérségi lövedék egy 50 méter sugarú kör belsejébe esik egyenletes eloszlás szerint. Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozza meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az 25 méter és 35 méter sugarakkal határolt körgyűrűbe esik?

8. Egy 10 cm hosszúsági ropit egyenletes eloszlás szerint választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?

9. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlásfüggvényét! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$?

10. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel.

- Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$?
- Mi X^3 eloszlásfüggvénye?
- És a sűrűségfüggvénye?

11. Villamossal jövök az egyetemre, és azzal megyek haza. A várakozási időm reggel és este függetlenek egymástól, és egyenletes eloszlást követnek 0 és 3 perc között. Legyen X a reggeli és az esti várakozási időim összege. Határozza meg X eloszlásfüggvényét, majd pedig a sűrűségfüggvényét!

12. Villamossal jövök az egyetemre. A várakozási időm egyenletes eloszlást követ 0 és 3 perc között. Este busszal megyek haza. A várakozási időm egyenletes eloszlást követ 0 és 5 perc között. A várakozási időm reggel és este függetlenek egymástól. Legyen X a reggeli és az esti várakozási időim összege. Határozza meg X eloszlásfüggvényét, majd pedig a sűrűségfüggvényét!

13. Válasszunk egy olyan $f(x)$ függvényt, melyre teljesül, hogy $f(x) \geq 0$ minden x-re, és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Képzeljük el, hogy valaki az $f(x)$ függvény alatti és az x tengely feletti egységnyi területű T tartományban egyenletes eloszlás szerint választ egy véletlen P pontot. Az X valószínűségi változó értéke legyen a P pontnak a vízszintes (első) koordinátája. Határozza meg X sűrűségfüggvényét!

14. *** *(Nehezebb feladat.)* Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$. Legyen adott még egy $p(x)$ függvény is, melyre igaz, hogy $0 \leq p(x) \leq 1$. Tegyük fel, hogy valaki kísérletet hajt végre X -re, és az X pontra odatesz egy fekete pontot. Ezek után megnézi a p függvény értékét az X helyen, és ilyen valószínűséggel a pontot átfesti pirosra. Emlékeztetünk rá, hogy annak a valószínűsége, hogy X egy kis Δx intervallumocskába esik, közelítőleg $f(x)\ \Delta x$ -szel egyenlő.

    a) Közelítőleg mennyi a valószínűsége annak, hogy X egy kis Δx intervallumocskába esik, és a számegyenesen az X koordinátájú pont pirossá válik ?
    b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az X pont pirossá válik? (Az, hogy a piros pont hol van, most nem számít.)
    c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy X egy kis Δx intervallumocskába esik, feltéve, hogy pirossá válik?
    d) Valaki addig végez kísérleteket, amíg az első piros pontot megkapja, és az így adódó számot jelöli Y-nal. Határozza meg Y sűrűségfüggvényét!

16. Random számok transzformációi

1. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó

    a) a $(0, 1)$ intervallumon
    b) a $(0, 10)$ intervallumon
    c) a $(-10, 10)$ intervallumon

    Adja meg X eloszlásfüggvényét és a sűrűségfüggvényét!

2. Határozza meg az eloszlásfüggvényét és a sűrűségfüggvényét az alábbi valószínűségi változóknak:

    a) $X = 1 -$ RND
    b) $X = 5$ RND
    c) $X = -5$ RND
    d) $X = 2 + 5$ RND
    e) $X = -2 + 5$ RND
    f) $X =$ RND^{-2}
    g) $X =$ RND^c ahol c egy pozitív konstans
    h) $X =$ RND^c ahol c egy negatív konstans
    i) $X = 25\sqrt{\text{RND}}$
    j) $X = \ln(\text{RND})$
    k) $X = \ln(1 - \text{RND})$
    l) $X = -\ln(\text{RND})$

3. A $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül választunk két számot.

    a) Tekintjük a nagyobbik számot.
    b) Tekintjük a kisebbik számot.

    Mi ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

4. *** A $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül választunk három számot.

    a) Tekintjük a nagyobbik számot.
    b) Tekintjük a kisebbik számot.
    c) Tekintjük a középső számot.

    Mi ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye?

17. Folytonos eloszlások várható értéke

1. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket a sűrűségfüggvényükkel adunk meg.

   a) $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$
   b) $f(x) = 2x/a^2 \quad (0 < x < a)$
   c) $f(x) = 1/(2\sqrt{x}) \quad (0 < x < 1)$
   d) $f(x) = 0.5 + x \quad (0 < x < 1)$
   e) $fx) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

   Rajzolja le a sűrűségfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

   - a várható értéke?
   - a második momentuma?
   - a varianciája?
   - a szórása?

2. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket az eloszlásfüggvényükkel adunk meg.

   a) $F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$
   b) $F(x) = x^2/a^2 \quad (0 < x < a)$
   c) $F(x) = 1 - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$
   d) $F(x) = \sqrt{x} \quad (0 < x < 1)$

   Rajzolja le az eloszlásfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

   - a várható értéke?
   - a második momentuma?
   - a varianciája?
   - a szórása?

3. Egy Bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a Dél-Szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a Bergengócot?

18. *** Béta eloszlás

1. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel a nagyobbikat.

   a) Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!
   b) Az eloszlásfüggvény deriválásával határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!
   c) *Az eloszlásfüggvény használata nélkül*, az

   $$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \leq X \leq x_2)}{x_2 - x_1} \qquad (\ x_1 \ \leq \ x \ \leq x_2, \quad x_1 \text{ és } x_2 \text{ közel vannak } x \text{ -hez })$$

   képletből kiindulva határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét! *(Ez a módszer ennek a gyakorlatnak az újdonsága!)*

2. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel a kisebbiket. A tennivaló ugyanaz, mint az előző feladatban.

3. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel

- a legnagyobbat.
- a nagyság szerint középsőt.
- a legkisebbet.

Mind a három esettel kapcsolatban végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.

4. Generálunk tíz egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel a nagyság szerint harmadik legkisebbet. Végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.

5. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel a nagyobbikat. Ha X-re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   a) átlaga?
   b) négyzetének az átlaga?
   c) varianciája?
   d) szórása?

6. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel a kisebbiket. Ha X-re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   a) átlaga?
   b) négyzetének az átlaga?
   c) varianciája?
   d) szórása?

7. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel

   - a legnagyobbat.
   - a nagyság szerint középsőt.
   - a legkisebbet.

   Mind a három esettel kapcsolatban határozza meg, hogy ha X-re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   a) átlaga?
   b) négyzetének az átlaga?
   c) varianciája?
   d) szórása?

19. Exponenciális eloszlás

1. Tegyük fel, hogy egy nagyvárosi bisztróban, ahol éjjel-nappal egyforma intenzitással jönnek-mennek, esznek-isznak az emberek, a poharak átlagos élettartama 4.5 hónap.

   a) A poharaknak kb. hány százaléka él kevesebb, mint 3 hónapot?
   b) A poharaknak kb. hány százaléka él több, mint 6 hónapot?
   c) A poharaknak kb. hány százalékának esik az élettartama 1 hónap és 3 hónap közé?
   d) Az 1 hónapnál hosszabb életű poharaknak kb. hány százaléka él több, mint 6 hónapot?
   e) A 8.25 hónapnál hosszabb életű poharaknak kb. hány százaléka él még tovább még több, mint 1.5 hónapot?
   f) Az a hónapnál hosszabb életű poharaknak kb. hány százaléka él az a hónap után még több, mint b hónapot? *Vegye észre, hogy a kérdésre a értékétől függetlenül akármilyen b esetén ugyanaz a válasz adódik! Mit jelent ez a valóságra nézve?*
   g) Mennyi az a időtartam, amelynél a poharak 99 százaléka él hosszabb életet?

h) Mennyi az a időtartam, amelynél a poharak 90 százaléka él rövidebb életet?

2. Egy utcai telefonfülkében, amikor odaérek, egy hölgy bszélgeet. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

3. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

4. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

5. Egy bizonyos fajta mosógép első meghibásodási ideje exponenciális eloszlást követ. A gépek első meghibásodása 70% valószínűséggel történik 5 éven belül. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az első meghibásodás három éven belül történik.

6. Egy bizonyos fajta égőből kettőt használunk a szobában. A lámpák élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy két év múlva

   a) mindkettő világít!
   b) legalább az egyik világít!

20. Normális eloszlás

(A számításokhoz szükség lehet kalkulátorra vagy számítógépre vagy a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének nyomtatott táblázatára.)

1. $\phi(x)$ -szel jelöljük a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

   a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$
   b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\phi(x)dx$
   c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,\phi(x)dx$
   d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,\phi(x)dx$
   e)

2. $\Phi(x)$ -szel jelöljük a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

3. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!

   a) $\mathrm{P}(-1 < X < 1)$
   b) $\mathrm{P}(-2 < X < 2)$
   c) $\mathrm{P}(-3 < X < 3)$

4. Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!

5. Tegyük fel, hogy X eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. Számolja ki a következő valószínűségeket:

   a) $\mathrm{P}(X > 225)$
   b) $\mathrm{P}(215 < X < 229)$

c) $\mathrm{P}(215 < X < 229 \mid X > 225)$

d) $\mathrm{P}(X > 225 \mid 215 < X < 229)$

6. Egy bizonos országban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető.

   - Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik?
   - Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél?
   - Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kérdezett események valószínűségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)?
   - Szimulálja Excelben egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát!

7. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik? Szimuláljuk Excelben imserősünk megérkezési idejét!

8. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban

   a) 50 fő alatt

   b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

9. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

10. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő? A gyertyák működési idejének Excelben való szimulálásával ellenőrizzük le az előző rész megoldását!

11. Tegyük fel, hogy egy országban a férfiak testmagassága normális eloszlást követ 180 cm várható értékkel és 10 cm szórással.

    a) A férfiaknak kb. hány százaléka magasabb, mint 190 cm?

    b) A férfiaknak kb. hány százaléka alacsonyabb, mint 195 cm?

    c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott férfi testmagassága 170 és 190 cm közé esik?

    d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott férfi testmagassága kevesebb, mint 195 cm feltéve, hogy több, mint 175 cm?

    e) Mennyi az a testmagasság, amelynél a férfiak 10 százaléka alacsonyabb? És az a magasság, aminél a 99 százalék alacsonyabb?

    f) Mennyi az a testmagasság, amelynél a férfiak 90 százaléka magasabb?

    g) Mennyi az a testmagasság-eltérés, amelyre igaz, hogy a férfiak 50 százalékának ennél kevesebbel tér a testmagassága az átlagos 180 cm-től?

12. Képzeljünk el egy üzletet, ami minden nap nyitva van. A napi bevétel normális eloszlást követ. Tegyük fel, hogy a várható érték 150 ezer forint és a szórás 20 ezer forint. Egy évben kb. hány olyan nap van, amikor

    a) a bevétel több, mint 200 ezer forint?

    b) a bevétel kevesebb, mint 130 ezer forint?

    c) a bevétel 140 ezer és 150 ezer forint közé esik?

    d) A bevétel 20 százaléka adó. Mennyi az adó várható értéke és szórása?

13. A négy éve ültetett fenyőfák hossza normális elszlát követ 2 méter várható értékel és 30 centiméter szórással. A legmagasabb 10%-ot akarjuk kivágni. Milyen magas fákat vágjunk ki?

14. A csokigyárban azt figyelték meg, hogy 1000 tejcsokiból körülbelül 10 csoki tömege tér el az előírttól legalább 1 g-mal. Normálist eloszlást feltételezve mekkora a csokik tömegének szórása?

15. Egy pékségben minden nap 100 db kenyeret szeretnének legyártani. Ehhez átlagosan 100 kg alapanyagot használnak fel. A pékek pontos emberek, azonban éjjel ébrednek és hajnalban dolgoznak így elég álmosak ezért átlagosan minden 7-edik kenyér tömege az átlagostól legalább 10 dkg-mal eltér. Az elkészült kenyereknek mi az átlagos tömege és mekkora a szórásuk?

16. Tegyük fel, hogy egy országban az intelligencia tesztek eredményei normális eloszlást követnek 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással.

    a) Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberek hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja?
    b) A 100 pont körül mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja?
    c) Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?

21. Várható érték, variancia, szórás

1. Ha egy adatrendeszer minden eleméhez vagy egy valószínűségi változóhoz hozzáadunk

    - ötöt,
    - mínusz ötöt,
    - egy b konstanst,

    akkor hogyan változik

    a) a várható érték?
    b) a variancia?
    c) a szórás?

2. Ha egy adatrendeszer minden elemét vagy egy valószínűségi változót megszorzunk

    - hárommal,
    - mínusz hárommal,
    - egy a konstanssal,

    akkor hogyan változik

    a) a várható érték?
    b) a variancia?
    c) a szórás?

3. Ha egy adatrendeszer minden elemét vagy egy valószínűségi változót megszorzunk egy a konstanssal, majd az eredményt növeljük b-vel, akkor hogyan változik

    a) a várható érték?
    b) a variancia?
    c) a szórás?

4. Lehet-e egy adatrendeszer vagy egy valószínűségi változó szórása nulla? Ha igen, mutasson rá példát!

5. Tegyük fel, hogy a zsebemben lévő 5, 10, 20, 50 és 100 forintos érmék száma független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ paraméterekkel.

    Határozza meg a zsebemben lévő aprópénz

    a) darabszámának
    b) forint értékének

    a várható értékét és szórását!

6. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba. Mennyi a várható értéke, illetve a szórása a zsákban lévő zsömlék összsúlyának?

7. Van 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Mennyi a várható értéke és a szórása annak a valószínűségi változónak, amely az mutatja, hogy összesen mennyi ideig tudunk az égőinkkel világítani?

8. Egy kisváros téglalap alakú, a téglalap oldalai 3, illetve 5 kilométer hosszúak. A város $(0;0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért ha a város (x,y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x|+|y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számolja ki a betegszállítás idejének a várható értékét és a szórását.

22. *** Kovariancia

1. Ha az X valószínűségi változót megszorzunk egy a konstanssal, majd az eredményt növeljük b-vel, és az Y valószínűségi változót változatlannul hagyjuk, akkor hogyan változik a kovariancia közöttük?

2. Ha az X valószínűségi változót megszorzunk egy a konstanssal, és az Y valószínűségi változót megszorzunk egy b konstanssal, akkor hogyan változik a kovariancia közöttük?

3. Az alábbi diszkrét eloszlás kovarianciáját Excellel könnyen ki lehet számolni. Tegye meg:

	-2	-1	0	1	2	x
2	0,05	0,05	0,05	0,02	0,02	
1	0,05	0,05	0,05	0,02	0,02	
0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	
-1	0,02	0,02	0,05	0,05	0,05	
-2	0,02	0,02	0,05	0,05	0,05	
y						

4. Ha az előző feladatban szereplő diszkrét eloszlás kovarianciáját már kiszámolta, akkor az itt következőét már meg lehet mondani számolás nélkül:

	-2	-1	0	1	2	x
2	0,02	0,02	0,05	0,05	0,05	
1	0,02	0,02	0,05	0,05	0,05	
0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	
-1	0,05	0,05	0,05	0,02	0,02	
-2	0,05	0,05	0,05	0,02	0,02	
y						

5. Egy ládikában 5 piros, 10 fehér és 15 zöld golyó van. Háromszor húzunk

   - visszatevéssel,
   - visszatevés nélkül.

   Legyen $X =$ ahányszor pirosat húzunk, $Y =$ ahányszor fehéret húzunk, $Z =$ ahányszor zöldet húzunk. Határozza meg a kovarianciát

   a) X és Y között,
   b) X és Z között,
   c) Y és Z között!

6. Éjfél előtt X órával érkezik az első tolvaj. Feltesszük, hogy X egyenletes eloszlású 0 és 1 között. (Tehát a tolvaj 23 óra és éjfél között jön.) Az első tolvaj érkezése után, de ugyancsak éjfél előtt Y órával érkezik a második tolvaj. Feltesszük, hogy az $X = x$ feltétel mellett Y egyenletes eloszlású 0 és x között. Határozza meg a kovarianciát X és Y között!

23. Moivre Laplace tétel

1. 100-szor dobunk egy szabályos dobókockával. Legyen X a dobott hatosok száma.
   a) Milyen (diszkrét!) eloszlást követ ez a valószínűségi változó?
   b) Mennyi a várható értéke és a szórása?
   c) Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke 15 és 20 közé esik, ezeket az értékeket is beleértve?
   d) Számolja ki ugyenezt a valószínűséget a megfelelő normális eloszlás segítségével is, és vesse össze a két eredményt! Figyeljen rá, hogy a normális eloszlás esetén az intervallum határai $14,5$ és a $20,5$ kell legyenek!
   e) Mi a valószínűsége annak, hogy X értéke ténylegesen 15 és 20 közé esik?
   f) Számolja ki ezt a valószínűséget is normális eloszlás segítségével! Figyeljen rá, hogy a normális eloszlás esetén most az intervallum határai $15,5$ és a $19,5$ kell legyenek!
2. Egy szabályos dobókockával $n = 400$-szor dobunk. Legyen X a dobott hatosok száma. Tekintsük a dobott hatosok számának a relatív gyakoriságát, vagyis az X/n valószínűségi változót!
   a) Milyen (diszkrét!) eloszlást követ ez a valószínűségi változó?
   b) Mennyi a várható értéke és a szórása?
   c) Mi a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság $0,15$ és $0,20$ közé esik? Számolja ki ezt a valószínűséget binomiális eloszlás segítségével!
   d) Számolja ki ugyenezt a valószínűséget a megfelelő normális eloszlás segítségével is, és vesse össze a két eredményt!
3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 120 kockadobás során előforduló hatosok száma 19 és 21 közé esik, ezeket az értékeket is beleértve?
4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 1200 kockadobás során előforduló hatosok száma 190 és 210 közé esik, ezeket az értékeket is beleértve?
5. Egy szabályos érmét 40-szer feldobunk, és X-szel jelöljük a kapott fejek számát. Határozza meg annak valószínűségét, hogy $X = 20$
   a) a binomiális eloszlás segítségével,
   b) a Moivre Laplace tételt használva normális eloszlással. Segítség: $\mathrm{P}(X = 20) = \mathrm{P}(19,5 \leq X < 20,5)$.

24. Hány kísérlet kell ahhoz, hogy ... ?

6. Hány random számot kell átlagolni ahhoz, hogy az átlaguk a $0,5$ értéket $0,1$-nél kisebb hibával közelítse $0,8$ biztonság mellett? (Itt a biztonság – természetesen – valószínűséget jelent.)
7. Szabályos érmével hány dobás kell ahhoz, hogy a fej relatív gyakorisága a fej valószínűségét $0,05$-nél kisebb hibával közelítse $0,95$ biztonság mellett?
8. Szabályos dobókockával hány dobás kell ahhoz, hogy a hatos relatív gyakorisága a hatos valószínűségét $0,05$-nél kisebb hibával közelítse $0,95$ biztonság mellett?
9. Hány dobás kell ahhoz, hogy a relatív gyakoriság segítségével a π szám reciprokát a Buffon-féle tű dobálós módszerrel
   - $0,1$ -nél
   - $0,01$ -nél
   - $0,001$ -nél

   kisebb hibával közelítsük
   a) $0,9$

b) $0,99$
c) $0,999$

biztonság mellett? (Ez itt 3x3=9 feladat.)

10. Hány kísérlet kell ahhoz, hogy egy (számunkra nem ismert valószínűségű) esemény valószínűségét az esemény relatív gyakorisága segítségével $0,1$ -nél kisebb hibával közelítsük $0,8$ biztonság mellett?

11. Hány kísérletet kell végezni egy ismeretlen várható értékű valószínűségi változóra ahhoz, hogy az átlag az ismeretlen várható étréket $0,1$-nél kisebb hibával közelítse $0,8$ biztonság mellett, ha tudjuk, hogy a szórása 2-vel egyenlő?

25. Centrális határeloszlás tétel

1. Ha egy valószínűségi változó sok független valószínűségi változó összegeként áll elő, akkor eloszlása közelítőleg normális eloszlás. Ilyen valószínűségi változó például:

   - tizenkét random szám összege;
   - egy város lakosainak napi összes gázfogyasztása;

   Keressen a való világban olyan valószínűségi változókat, melyek sok független valószínűségi változó összegeként állnak elő, és ezért normális eloszlással modellezhetőek!

2. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba.

   a) Mennyi a várható értéke, illetve a szórása a zsákban lévő zsömlék összsúlyának?
   b) Közelítőleg milyen eloszlást követ a zsákban lévő zsömlék összsúlya?
   c) Mi a (közelítő) valószínűsége annak, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya több, mint 105 dkg?

3. Van 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

4. A jegyiroda előtt a fiatalok hosszú sorban állnak koncertjegyért. Ebben a pillanatban éppen 18-an állnak az egyik pénztár előtt. Megfigyeltem, hogy a kiszolgálási idők függetlenek, és egy-egy vásárló kiszolgálási ideje "örökifjú" tulajdonságú (máshogy mondva: memória nélküli") valószínűségi változó 3 perc átlaggal. Becsülje meg annak a valószínűségét, hogy a most utolsóként álló fiatal több mint 60 percet fog a pénztár előtt eltölteni!