Valószínűségszámítás – FOGALMAK

készülő jegyzet / könyv

Vetier András

2016. május 27.

Tartalomjegyzék

Az anyag ütemezése 2016. tavaszán

Ez a jegyzet az építőmérnök hallgatók A3 Matematika c. tárgyának 2016. tavaszi félévének első felében tárgyalásra kerülő valószínűségszámítás anyagához készül(t).

A *** -gal jelzett részek az A3 -on túlmutatnak, azokat nem kell megtanulni. Egyelőre csak teljes alfejezetek elé tettem ki a *** -okat. Az alfejezeteken belül egyes szövegrészeket is meg fogom jelölni *** -gal, de ezt még nem tettem meg.

A gyakorlatok, előadások anyagai heti bontásban:

1. **Gyakorlat:** 1.1 - 1.8 alfejezet és 2. fejezet
   Előadás: 1.9 alfejezet, 3. fejezet
2. **Gyakorlat:** 5. fejezet
   Előadás: 4. fejezet és 6. fejezet
3. **Gyakorlat:** 7. fejezet és 8.1 - 8.4 alfejezetek
   Előadás: 8.5- 8.9 alfejezetek
4. **Gyakorlat:** 8.10 alfejezet, 9. és 10. fejezet
   Előadás: 11. fejezet
5. **Gyakorlat:** 12.1 - 12.2 alfejezetek
   Előadás: 12.3 - 12.5 alfejezetek
6. **Gyakorlat:** gyakorlás
   Előadás: zárthelyi

Kérem a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezni. A levél tárgya legyen: **hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák közlésére, amikor valaki - a számítógépen olvasva a jegyzetet - hibát észlel:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl nevében legyen benne a hiba helyének az oldalszáma
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a szerzőnek a fenti módon

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

1. Esemény, valószínűség

1.1. Kimenetelek

Véletlen jelenség: Adott körülmények között valami történik (Két szabályos dobódobókockát szabályosan feldobunk).

Kísérlet: A jelenség önmagától vagy az én szándékom miatt lezajlik. (Korrekt módon gurítom a két dobókockát).

Megfigyelés: Megfigyeljük azt, ami érdekel minket. (Megfigyeljük a dobott számok összegét, vagy szorzatát, hányadosát, de megfigyelhetném azt is, hogy a dobókocka mennyi ideig gurul, hogy hol áll meg, stb.).

Kimenetelek (lehetséges kimenetelek, elemi események): A megfigyelésünk lehetséges eredményei. (Két dobókockával dobva az összeg lehetséges eredményei: 2, 3, ... , 12).

Eseménytér: Az összes lehetséges kimenetelek halmaza. (A példánkban az eseménytér a 11 elemű $\{2, 3, ., 12\}$ halmaz).

1.2. Esemény

Esemény: Állítás a jelenséggel kapcsolatban, ami minden kísérletnél IGAZ (bekövetkezik) vagy HAMIS (nem következik be).

Kísérletsorozat: Több (egymásra semmi hatást kifejtő) kísérletet hajtunk végre.

1.3. Valószínűség

Gyakoriság: Ahányszor bekövetkezik az esemény.

Relatív gyakoriság: Gyakoriság osztva az összes kísérletek számával.

Valószínűség: Egy adott eseményt vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy sok kísérlet esetén a relatív gyakoriság közel van egy olyan értékhez, ami nem függ a véletlentől, hanem az eseményre jellemző. Ezt az értéket nevezzük az esemény valószínűségének. A relatív gyakoriság kevés kísérlet esetén erősen eltérhet a valószínűségtől, de a kísérletszám növekedtével egyre közelebb kerül hozzá.

A valószínűségszámítás megtanít arra, hogy a valószínűségeket kísérletek elvégzése nélkül, elméleti módszerekkel meghatározzuk.

1.4. Műveletek eseményekkel

Események - halmazok (Venn diagram): Az eseményeket az eseménytér (mint "alaphalmaz") részhalmazaival reprezentáljuk. Mindenegyes eseményt a szóbanforgó eseményre nézve kedvező kimenetelek által alkotott részhalmaz reprezentál .

Biztos esemény: Mindig bekövetkezik. Az alaphalmazzal reprezentáljuk, amit S-sel jelölünk. Más jelölések: U, I, Ω.

Lehetetlen esemény: Sohase következik be. Az üres halmazzal reprezentáljuk. A $\emptyset$ jellel jelöljük.

Ellentett esemény ("nem", komplementer): Pontosan akkor következik be, amikor az eredeti esemény nem. Felülvonással jelöljük, pl.: $\overline{A}$.

Események "és" kapcsolata (metszet, közös rész, szorzat): A szóbanforgó események mindegyike bekövetkezik. Jelölések:

Két esemény metszete: $A \cap B$

Véges sok esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n$

Végtelen sok esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

Kizáró események: A szóbanforgó események közül legfeljebb egy következhet be. Bármely kettő kizárja egymást, egyidejű bekövetkezésük lehetetlen.

Két eseményre: $A \cap B = \emptyset$.

Több (véges vagy végtelen sok) eseményre: ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Események "vagy" kapcsolata (únió, egyesítés, összeg): A szóbanforgó események közül legalább egy bekövetkezik. Jelölések:

Két esemény úniója: $A \cup B$

Véges sok esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$

Végtelen sok esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Kizáró események "vagy" kapcsolata (úniója, egyesítése, összege): A szóbanforgó események közül pontosan egy bekövetkezik. A jelölések általában nem különböznek a korábbi jelölésektől:

Két kizáró esemény úniója: $A \cup B$

Véges sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$

Végtelen sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Azonban kizáró eseménykre bizonyos szabályok egyszerűbbek az általános szabályoknál, vannak olyan könyvek, ahol egy *-gal hívják fel a figyelmet arra a tényre, hogy műveletben szereplő események kizáróak:

Két kizáró esemény úniója: $A \cup^* B$

Véges sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup^* A_2 \ldots \cup^* A_n$

Végtelen sok kizáró esemény úniója: $A_1 \cup^* A_2 \cup^* \ldots$

1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai

Ebben az alfejeztben valószínűség alapvető tulajdonságait soroljuk fel, melyek – a relatív gyakoriság ugyanilyen tulajdonságai alalpján – kézenfekvőek. Fontos, hogy az olvasó ne csak memorizálja ezeket a tulajdonságokat, hanem értse, lássa, hogy *a valószínűségnek ezek a tulajdonságai a relatív gyakoriság (triviális!) hasonló tulajdonságai miatt igazak*. Néhány bonyolultabb szabályt egy későbbi fejezetben sorolunk fel. Megjegyezzük, hogy az 1., a 2. és a 5. tulajdonságból logikai úton le lehet vezetni a valószínűség összes többi tuldajdonságát, ezért a valószínűségszámítás axiómatikus felépítésekor ezek szolgálna axiómákként. Ebben a jegyzetben nem célunk az axiómatikus tárgyalás. A technikásabb bizonyításokat is leegyszerűsítve, a szemléletre támaszkodva mutatjuk majd be. Fő célunk az elmélet és a valóság kapcsolatátának világos tálalása.

1. **Minden esemény valószínűsége** 0 **és** 1 **közé esik:**

$$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$$

2. **A biztos esemény valószínűsége** 1 **:**

$$\mathrm{P}(S) = 1$$

3. **A lehetetlen esemény valószínűsége** 0 **:**

$$P(\emptyset) = 0$$

4. **Komplementer szabály**:
Minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 \qquad \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) \qquad \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

5. **Összegzési szabály kizáró eseményekre:**
Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, akkor

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$$

Ha $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ végtelen sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots$, akkor

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) + \ldots$$

6. **Általános összegzési szabály** (még csak) **két eseményre**:
Ha A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

7. **Általános kivonási szabály**:
Ha a A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

8. **Speciális kivonási szabály**:
Ha a B esemény maga után vonja az A eseményt, vagyis $B \subseteq A$, akkor

$$\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$$

Feladat: Páros vagy páratlan? Egy érmét dobálunk az első fejig. Megfigyeljük az ehhez szükséges dobások számát. Mi a valószínűsége annak, hogy az ehhez szükséges dobások száma páros szám?

Megoldás: A lehetséges kimenetelek: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, soha, ahol a "soha" akkor következik be, ha mindig csak írást dobunk, vagyis soha se dobunk fejet. Az alábbi valószínűségek triviálisak:

$$\mathrm{P}(\text{az első fej a 2. dobásra adódik}) = \tfrac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\text{az első fej a 4. dobásra adódik}) = \tfrac{1}{16}$$

$$\mathrm{P}(\text{az első fej a 6. dobásra adódik}) = \tfrac{1}{64}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}(\text{az első fej az } n\text{-ik dobásra adódik}) = \tfrac{1}{2^n}$$

$$\vdots$$

Ezekből a feladat kérdésére a válasz összegzéssel adódik:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{az első fej eléréséhez páros sok dobás kell}) = \\
&= \mathrm{P}(\text{az első fej a 2. dobásra adódik}) + \\
&+ \mathrm{P}(\text{az első fej a 4. dobásra adódik}) + \\
&+ \mathrm{P}(\text{az első fej a 6. dobásra adódik}) + \\
&\vdots \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \ldots \ = \ \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \ = \ \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} \ = \ \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban, a végtelen sor összegzésénél, felhasználtuk a jól ismert tényt, hogy egy végtelen mértani sor összegére igaz:

$$\text{összeg} = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}$$

1.6. Klasszikus problémák

Gyakran megesik, hogy a megfigyelésünknek véges sok kimenetele van, melyek (valamilyen szimetria) miatt érezhetően egyforma valószínűségűek. Ilyenkor minden kimenetel valószínűsége a lehetséges kimenetelek számának a reciproka, és egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményre nézve kedvező kimenetelek száma osztva az összes események számával:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\textit{az eseményre nézve kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetelek száma}}$$

1.7. Számlálási alapszabályok

Ezek a szabályok teljesen nyilvánvalóak, mindenki ismeri őket. Mégis felsoroljuk őket, hogy amikor kell, hivatkozhassunk rájuk.

Összegzés: Ha egy halmaz egymást kizáró részhalmazokra bomlik (a halmazt particionáljuk, a halmaz partíciókra bomlik), akkor *a halmaz elemszáma egyenlő a részhalmazok elemszámainak összegével.*

Kivonás: Ha egy halmaznak elhagyjuk egy részhalmazát, akkor *a megmaradó halmaz elemeinek száma egyenlő az eredeti halmaz elemszáma mínusz az elhagyott részhalmaz elemszáma.*

Szorzás: Ha két halmazt tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és rendezett párokat képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük a párok első elemeit, a másodikból a párok második elemeit, akkor *a párok darabszáma egyenlő a két halmaz elemszámának a szorzatával.*

Több tényezős szorzás: Ha n halmazt tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és így tovább kapjuk az $(n-1)$-ik, n-ik halmazokat, és rendezett n-eseket képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük a az első elemet, a másodikból a másodikat, és így tovább az n-ik halmazból vesszük az n-ik elemet, akkor *a rendezett n-esek darabszáma egyenlő a halmazok elemszámainak a szorzatával.*

Több tényezős szorzás fa-gráfokkal: Képzeljünk el egy fa-gráfot, mely "felfelé nő", és
gyökeréből k_1 él indul ki (ezek az elsőrendű élek),
az elsőrendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_2 él indul ki (ezek a másodrendű élek),
a másodrendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_3 él indul ki (ezek a harmadrendű élek),
és így tovább,
az $(n-1)$-ed rendű élek mindegyikének a felső végpontjából k_n él indul ki.
E fa-gráf tetején a végpontok száma: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Hatványozás: Ha egy halmazt n példányban tekintünk, és az egyiket "első"-nek nevezzük, a másikat "második"-nak, és így tovább kapjuk az $(n-1)$-ik n-ik pédányát a halmaznak, és rendezett n-eseket képezünk az elemeikből úgy, hogy az első halmazból vesszük a az első elemet, a másodikból a másodikat, és így tovább az n-ik halmazból vesszük az n-ik elemet, akkor *a rendezett n-esek darabszáma egyenlő a halmaz elemszámának n-ik hatványával.*

Osztás: Ha egy halmazt úgy particionálunk (bontunk diszjunkt részhalmazokra), hogy minden partició (részhalmaz) ugyanannyi elemből áll, akkor *a particiók (részhalmazok) darabszáma egyenlő a halmaz elemszáma osztva a partíciók (részhalmazok) közös elemszámával.*

1.8. Kombinatorikus alapképletek

Az alábbi táblázatba folgalt képleteket ismertnek feltételezzük. Egy-egy példával világítunk rá jelentésükre.

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ n golyót ennyiféleképpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \dots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l-et, ennyiféleképpen tehetjük meg

Megjegyzés: Az ismétléses kombináció képletét meg lehet említeni, de nem kell foglalkozni vele.

1. Példa: Lottó öt találat. Az ötös lottón 90 szám közül húznak ki 5-öt. A nyerés szempontjából a sorrend nem számít, ezért az összes lehetséges kombinációk száma

$$\binom{90}{5} = 43,949,268 \approx 44 \text{ millió}$$

A biztos teli találat eléréséhez ennyi szelvényt kellene kitöltenünk. Megemlítjük, hogy ha 44 millió lottószelvényt egymásra raknánk, akkor ez a torony a Föld legmasabb csúcsáig, a Mount Everest tetejéig érne fel. Ha egyetlen szelvénnyel játszom, akkor az öt találatom valószínűsége

$$\frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43,949,268} \approx 0.000000023$$

hiszen a 43,949,268 egyformán valószínű kombináció között az az egyetlen a kedvező, ahogyan én töltöm ki a szelvényt.

2. Példa: Lottó találatok. Annak az eseményeknek a valósznűsége, hogy egy szelvénnyel játszva az ötös lottón, a találataim száma k, az alábbi törttel adható meg:

$$\frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, 5$. A valószínűségek numerikus értéke:

$$\text{P(5 találotos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000000023$$

$$\text{P(4 találotos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000009670$$

$$\text{P(3 találotos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \approx 0.000812300$$

$$\text{P(2 találotos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0.022473639$$

$$\text{P(1 találotos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} \approx 0.230354804$$

$$\text{P(0 találotos lesz a szelvényem)} = \frac{\binom{5}{0}\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 0.746349564$$

3. Példa: Hány piros? A lottó probléma általánosítása: tegyük fel, hogy egy dobozban N darab golyó van. Közülük K darab piros, $N - K$ darab fehér. Kiveszünk n darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k darab piros lesz? Válasz:

$$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4. Példa: Hány piros, hány kék? Az előző probléma általánosítása: tegyük fel, hogy egy dobozban N darab golyó van. Közülük K_1 darab piros, K_2 darab kék, $N - K_1 - K_2$ darab fehér. Kiveszünk n darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan k_1 darab piros és pontosan k_2 darab kék lesz? Válasz:

$$\frac{\binom{K_1}{k_1}\binom{K_2}{k_2}\binom{N-K_1-K_2}{n-k_1-k_2}}{\binom{N}{n}}$$

5. Példa: Nyolcszor húzunk. Az előző példában feltett általános kérdést most egy speciális esetben alaposabban megvizsgáljuk. Tegyük fel, hogy 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínége annak, hogy a kivett golyók között pontosan x darab piros és pontosan y darab kék lesz? Válasz:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}$$

minden olyan x-re és y-ra, melyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

$$0 \le x \le 8$$

$$0 \le y \le 8$$

$$0 \le 8 - x - y \le 8$$

A valószínűségek numerikus értékei segítségével többször fogunk majd a későbbiekben dolgozni, ezért Excellel kiszámoltuk és táblázatba rendezve itt megadjuk őket:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.0317	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.0756	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

1.9. RANDBETWEEN utasítás

Az Excelben az egész értékeket felvevő

`RANDBETWEEN(A;B),    magyarul VÉLKÖZÖTT(A;B)`

utasítás olyan véletlen számot állít elő, mely egyenletes eloszlást követ az $\{A, A+1, \ldots, B-1, B\}$ halmazon.

1. Példa: Száz cédula. A

`RANDBETWEEN(1;100)`

utasítással azt szimulálhatjuk, mintha az $\{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ számokat egy-egy cédulára írnánk, a cédulákat egy dobozba tennénk, és a dobozból kihúznánk egy cédulát, és megnéznénk a rajta lévő számot. Annak a valószínűsége, hogy `RANDBETWEEN(1;100)` értéke

pontosan 55, egyenlő $1/100$-dal

kisebb vagy egyenlő, mint 55, egyenlő $55/100 = 0.55$-dal

nagyobb 50-nél, de kisebb 60-nál, egyenlő $9/100 = 0.09$-dal

2. Példa: Dobókocka. A

`RANDBETWEEN(1;6)`

utasítással azt szimulálhatjuk, mintha egy szabályos dobókockával dobnánk, és tekintenénk a dobott számot. A 6 lehetséges eset mindegyike $\frac{1}{6}$ valószínűségű.

Fontos, hogy Olvasó tisztában legyen azzal, hogy ha a `RANDBETWEEN(1;6)` utasítást többször leírjuk, akkor minden alkalmazás a többitől független eredményt ad. Ha az utasítást ahhoz hasonlóan, ahogy most ideírjuk:

`RANDBETWEEN(1;6)    RANDBETWEEN(1;6)`

két külön Excel-cellába is beírjuk, azt szimulálhatjuk, mintha két szabályos dobókockával dobnánk.

3. Példa: Két dobókocka. Két szabályos dobókockával dobunk. A két dobókockát (még akkor is, ha teljesen egyformának tűnnek) meg tudjuk különböztetni, ha az egyiket a bal, a másikat a jobb kezünkből gurítjuk. A két dobókocka ily módon való dobását szimulálhatjuk a

`RANDBETWEEN(1;6)    RANDBETWEEN(1;6)`

utasításpárral. Nyilván 36 lehetséges kimenetel kínálkozik. Ezt a 36 esetet – egymás után leírva – fel is sorolhatjuk, de előnyös, ha táblázatba rendezve adjuk meg őket. Íme:

jobb bal	1	2	3	4	5	6
1	$1;1$	$1;2$	$1;3$	$1;4$	$1;5$	$1;6$
2	$2;1$	$2;2$	$2;3$	$2;4$	$2;5$	$2;6$
3	$3;1$	$3;2$	$3;3$	$3;4$	$3;5$	$3;6$
4	$4;1$	$4;2$	$4;3$	$4;4$	$4;5$	$4;6$
5	$5;1$	$5;2$	$5;3$	$5;4$	$5;5$	$5;6$
6	$6;1$	$6;2$	$6;3$	$6;4$	$6;5$	$6;6$

A 36 eset mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűségű:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

4. Példa: Két dobókockával dobott számok összege. Egyes társasjátékokban két dobókockával dobunk, és a játékban a dobott számok összege, azaz – a szimuláció nyelvén mondva – a

```
RANDBETWEEN(1;6)+ RANDBETWEEN(1;6)
```

utasítás értéke számít. A következő táblázatban at összeg értékeit tüntetjük fel:

bal \ jobb	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A táblázat 36 cellájában

2 -es érték	1 -szer
3 -as érték	2 -szer
4 -es érték	3 -szor
5 -ös érték	4 -szer
6 -os érték	5 -ször
7 -es érték	6 -szor
8 -as érték	5 -ször
9 -es érték	4 -szer
10 -es érték	3 -szor
11 -es érték	2 -szer
12 -es érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy az összeg értéke

2 ,	egyenlő	$1/36$	-dal
3 ,	egyenlő	$2/36$	-dal
4 ,	egyenlő	$3/36$	-dal
5 ,	egyenlő	$4/36$	-dal
6 ,	egyenlő	$5/36$	-dal
7 ,	egyenlő	$6/36$	-dal
8 ,	egyenlő	$5/36$	-dal
9 ,	egyenlő	$4/36$	-dal
10 ,	egyenlő	$3/36$	-dal
11 ,	egyenlő	$2/36$	-dal
12 ,	egyenlő	$1/36$	-dal

egyenlő. Ha az összeg lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

5. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata. Ha valakit a dobott számok szorzata érdekel, akkor az elméleti okoskodáshoz olyan táblázatra van szüksége, mely a szorzatokat tartalmazza:

jobb / bal	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	16	20	25	30
6	6	12	20	24	30	36

A táblázat 36 cellájában

1 -es érték	1 -szer
2 -es érték	2 -szer
3 -as érték	2 -szer
4 -es érték	3 -szor
5 -ös érték	2 -szer
6 -os érték	4 -szer
8 -as érték	2 -szer
9 -es érték	1 -szer
10 -es érték	2 -szer
12 -es érték	4 -szer
15 -ös érték	2 -szer
16 -es érték	1 -szer
18 -as érték	2 -szer
20 -as érték	2 -szer
24 -es érték	2 -szer
15 -es érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy a szorzat értéke

$$\begin{array}{rl} 1\,, & 1/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 2\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 3\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 4\,, & 3/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 5\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 6\,, & 4/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 8\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 9\,, & 1/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 10\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 12\,, & 4/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 15\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 16\,, & 1/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 18\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 20\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 24\,, & 2/36 \text{ -dal egyenlő} \\ 15\,, & 1/36 \text{ -dal egyenlő} \end{array}$$

egyenlő. Ha a szorzat lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

6. Példa: Két dobókockával dobott számok hányadosa. Ha valakit a dobott számok hányadosa (mondjuk, a bal kézből gutított dobókockán lévő szám osztva a jobb kézből gurított dobókockán kévő szám) a érdekel, akkor az elméleti okoskodáshoz olyan táblázatra van szüksége, mely a hányadosokat tartalmazza:

jobb / bal	1	2	3	4	5	6
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2	2	1	2/3	1/2	2/5	1/3
3	3	3/2	1	3/4	3/5	1/2
4	4	2	4/3	1	4/5	2/3
5	5	5/2	5/3	5/4	1	5/6
6	6	3	2	3/2	6/5	1

A táblázat 36 cellájában az

1/6 érték	1 -szer
1/5 érték	2 -szer
1/4 érték	2 -szer
1/3 érték	3 -szor
2/5 érték	2 -szer
1/2 érték	4 -szer
3/5 érték	2 -szer
2/3 érték	1 -szer
3/4 érték	2 -szer
4/5 érték	4 -szer
5/6 érték	2 -szer
1 érték	1 -szer
6/5 érték	2 -szer
5/4 érték	2 -szer
4/3 érték	2 -szer
5/3 érték	1 -szer
2 érték	1 -szer
5/2 érték	1 -szer
3 érték	1 -szer
4 érték	1 -szer
5 érték	1 -szer
6 érték	1 -szer

szerepel. Ezért annak a valószínűsége, hogy a hányados értéke

1/6 ,	egyenlő 1/36 -dal
1/5 ,	egyenlő 2/36 -dal
1/4 ,	egyenlő 2/36 -dal
1/3 ,	egyenlő 3/36 -dal
2/5 ,	egyenlő 2/36 -dal
1/2 ,	egyenlő 4/36 -dal
3/5 ,	egyenlő 2/36 -dal
2/3 ,	egyenlő 1/36 -dal
3/4 ,	egyenlő 2/36 -dal
4/5 ,	egyenlő 4/36 -dal
5/6 ,	egyenlő 2/36 -dal
1 ,	egyenlő 1/36 -dal
6/5 ,	egyenlő 2/36 -dal
5/4 ,	egyenlő 2/36 -dal
4/3 ,	egyenlő 2/36 -dal
5/3 ,	egyenlő 1/36 -dal
2 ,	egyenlő 1/36 -dal
5/2 ,	egyenlő 1/36 -dal
3 ,	egyenlő 1/36 -dal
4 ,	egyenlő 1/36 -dal
5 ,	egyenlő 1/36 -dal
6 ,	egyenlő 1/36 -dal

Ha a hányados lehetséges értékeit és a kapott valószínűségeket táblázatba rendezzük, az alábbi táblázatot kapjuk:

1/6	1/5	1/4	1/3	2/5	2/4	3/5	2/3	3/4	4/5	5/6	. . .
1/36	1/36	1/36	2/36	1/36	3/36	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36	. . .

...	1	6/5	5/4	4/3	3/2	5/3	2	5/2	3	4	5	6
...	6/36	1/36	1/36	1/36	2/36	1/36	3/36	1/36	2/36	1/36	1/36	1/36

2. Diszkrét eloszlás

2.1. Valószínűségi változó

Amikor a megfigyelés eredményei, vagyis a lehetséges kimenetelek *számok*, akkor azt mondjuk, hogy **valószínűségi változó**val van dolgunk. A gyakorlati alkalmazásokban felbukkanó valószínűségi változók két fontos csoportba sorolhatók:

1. A valószínűségi változónak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok lehetséges értéke van. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó **diszkrét**.
2. A valószínűségi változó lehetséges értékei egy véges vagy végtelen intervallumot tesznek ki Ilyenkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó **folytonos**.

2.2. Eloszlás

Ha egy diszkrét valószínűségi változó minden lehetséges értékének megadjuk a valószínűségét (táblázattal, képlettel, stb.), akkor azt mondjuk, hogy megadjuk a **valószínűségi változó eloszlásá**t.

Ha (mindenféle valószínűségi változóra való tekintet nélkül) egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz x elemeihez nemnegatív $p(x)$ számokat rendelünk úgy, hogy azok összege 1:

$$\sum_x p(x) = 1$$

akkor azt mondjuk, hogy megadunk egy **valószínűségi eloszlás**t (**valószínűség eloszlás**t), más kifejezéssel **normált eloszlás**t. A $p(x)$ függvényt **súlyfüggvény**nek (**valószínűségi függvény**nek) nevezzük.

Egy X valószínűségi változó esetén $p(x)$ megadja annak a valószínűségét, hogy a véletlen X érték x-szel egyenlő:

$$p(x) = \mathrm{P}(X = x)$$

1. Példa: Fiatal házaspárok gyerekei. Tegyük fel, hogy egy szociológiai felmérésben fiatal házaspárok (akik 3 évnél nem régebben házasodtak) gyermekeinek számát vizsgálták. A gyermekek száma 0, 1, 2, 3 lehet. A tapasztalatból tudhatjuk a négy lehetőség mindegyikének százalékos értékét. Tegyük fel, hogy ezek az alábbiak:

gyerekek száma	0	1	2	3
százalék	20	40	30	10

(A négy darab százalék érték összege természetesen 100.)

Ha egy fiatal házaspártházaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az alábbi valószínűségi változót:

$$X = \text{ gyerekek száma}$$

akkor a négy lehetséges érték mindegyikének a valószínűségét (a megfelelő százalék érték alapján) beírva a táblázatba megkapjuk az X valószínűségi változó eloszlását:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

(A négy darab valószínűség érték összege természetesen 1.)

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – ismét. Ha két dobókockával dobva a dobott számok összegét tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlása:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – ismét. Ha két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlása:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.3. Eloszlásfüggvény

Egy adott normált eloszlás esetén egy x lehetséges értékkel kapcsolatban a $(-\infty, x]$ intervallum valószínűségét $F(x)$-szel jelöljük:

$$F(x) = \mathrm{P}(\ (-\infty, x]\ )$$

Az $F(x)$ függvény neve: **eloszlásfüggvény**. Az eloszlásfüggvény értékét egy x helyen úgy kapjuk meg, hogy az x-nél kisebb vagy egyenlő összes k helyeken vesszük a súlyfüggvény értékét, és ezeket az értékeket összeadjuk:

$$F(x) = \sum_{k:k\leq x} p(k)$$

Ha a szóbanforgó eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor $F(x)$ jelentése nyilván annak a valószínűsége, hogy a véletlen X kisebb vagy egyenlő mint x:

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$$

Nyilvánvaló, hogy minden eloszlásfüggvény monotonmonoton növekedő

$$F(x-1) \leq F(x)$$

és súlyfüggvény értéke egy adott x helyen egyenlő az eloszlásfüggvény megváltozásával:

$$p(x) = F(x) - F(x-1)$$

Az $F(b) - F(a)$ különbség pedig nem más, mint az a-nál nagyon, de b-t még meg nem haladó számokból álló halmaz valószínűsége:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k: a<k\leq b} p(k) = \mathrm{P}(a < X \leq b)$$

1. Példa: Fiatal házaspárok – eloszlásfüggvény. Az előző alfejeztben elképzeltük, hogy véletlenszerűen választunk egy fiatal házaspárt, és tekintjük a gyerekeik számát, mint a X valószínűségi változót. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását ott megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy harmadik sorral, ami az eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0

Vegyük észre, hogyan képződik a harmadik sor a másodikból: minden elem egyenlő a felette álló sorban tőle balra lévő és a felette lévő elemek összegével.

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – eloszlásfüggvény. Ha két dobókockával dobva a dobott számok összegét tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlását megadó második sor alá a harmadik sorba odaírhatjuk az eloszlásfüggvény értékeit:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – eloszlásfüggvény. Ha két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát tekintjük, akkor az így kapott valószínűségi változó eloszlását megadó második sor alá a harmadik sorba odaírhatjuk az eloszlásfüggvény értékeit:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

2.4. Jobboldali eloszlásfüggvény

Egy adott normált eloszlás esetén egy x lehetséges értékkel kapcsolatban a $[x, \infty)$ intervallum valószínűségét $T(x)$-szel jelöljük:

$$T(x) = \mathrm{P}(\ [x, \infty)\ )$$

A $T(x)$ függvény neve: **jobboldali eloszlásfüggvény**. A jobboldali eloszlásfüggvény értékét egy x helyen úgy kapjuk meg, hogy az x-nél nagyobb vagy egyenlő összes k helyeken vesszük a súlyfüggvény értékét, és ezeket az értékeket összeadjuk:

$$T(x) = \sum_{k:k \geq x} p(k)$$

Amikor valamilyen probléma kapcsán a most bevezetett $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvényt is és a korábban bevezetett $F(x)$ eloszlásfüggvényt is használjuk, akkor az $F(x)$-et **baloldali eloszlásfüggvény**nek is nevezzük.

Ha a szóbanforgó eloszlás egy X valószínűségi változó eloszlása, akkor $T(x)$ jelentése nyilván annak a valószínűsége, hogy a véletlen X nagyobb vagy egyenlő mint x:

$$T(x) = \mathrm{P}(X \geq x)$$

Nyilvánvaló, hogy minden jobboldali eloszlásfüggvény monoton csökkenő

$$T(x-1) \geq T(x)$$

Nyilvánvaló, hogy minden x-re fennáll az alábbi egyszerű összefüggés:

$$F(x) + T(x) - p(x) = 1$$

1. Példa: Fiatal házaspárok – jobboldali eloszlásfüggvény. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jobboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0
$T(x)$	1.0	0.8	0.4	0.1

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – jobboldali eloszlásfüggvény. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jopbboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – jobboldali eloszlásfüggvény. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását és eloszlásfüggvényét megadtuk egy táblázattal. Most a táblázatot kiegészítjük egy negyedik sorral, ami a jopbboldali eloszlásfüggvény értékeit tartalmazza a megadott x helyeken:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.5. Módusz

Egy diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei közül a legvalószínűbbet a valószínűségi változó **módusz**ának nevezzük. Ha több ilyen érték is van, akkor több módusz is van. Ha egy eloszlást csak úgy önmagában - mindenféle valószínűségi változó nélkül - vizsgálunk, akkor azt az x értéket, mely(ek)re $p(x)$ maximális, **az eloszlás módusza(i)**nak nevezzük.

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – módusz. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak a módusza 1. Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolvashatjuk:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Vegyük észre, hogyan képződik a negyedik sor a másodikból: minden elem egyenlő a második álló sorban tőle jobbra lévő és a felette lévő elemek összegével.

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – módusz. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a módusza 7. Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolashatjuk:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – módusz. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak két módusza van: a 6 és a 12. Ezt a tényt a valószínűségi változó eloszlásának táblázatából kiolashatjuk:

x	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.6. Medián

Adott diszkrét valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az x számot **medián**nak nevezzük, ha úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a $(-\infty; x]$ intervallum is és a $[x; +\infty)$ intervallum is legalább $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}\left(\,(-\infty; x]\,\right) \;\geq\; \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \mathrm{P}\left(\,[x; +\infty)\,\right) \;\geq\; \frac{1}{2}$$

azaz

$$F(x) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(x) \geq \frac{1}{2}$$

1. Példa: Fiatal házaspárok gyermekei – medián. Egy véletlenszerűen választott fiatal házaspár gyerekeinek számával, mint valószínűségi változóval foglalkoztunk a fentiekben. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 1. Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény

x	0	**1**	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$F(x)$	0.2	0.6	0.9	1.0
$T(x)$	1.0	0.8	0.4	0.1

táblázatából kiolvasható

$$F(1) = 0.6 \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(1) = 0.8 \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk.

2. Példa: Két dobókockával dobott számok összege – medián. Két dobókockával dobva a dobott számok összegét vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 7. Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény

x	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

táblázatából kiolvasható

$$F(7) = \frac{21}{36} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(7) = \frac{21}{36} \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk.

3. Példa: Két dobókockával dobott számok szorzata – medián. Két dobókockával dobva a dobott számok szorzatát vizsgáltuk. Ennek a valószínűségi változónak a mediánja 10. Ezt a tényt az eloszlásfüggvény és a jobboldali eloszlásfüggvény

x	1	2	3	4	5	6	8	9	**10**	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$
$T(x)$	$\frac{36}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{31}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

táblázatából kiolvasható

$$F(10) = \frac{19}{36} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad T(10) = \frac{19}{36} \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségekből látjuk.

2.7. Kétdimenziós valószínűségi változó

1. Példa: Fiatal házaspárok – gyerekek és nagyszülők. Tegyük fel, hogy egy szociológiai felmérésben fiatal házaspárok (akik 3 évnél nem régebben házasodtak) gyermekeinek számát és az élő nagyszülők számát vizsgálták. A gyermekek száma 0, 1, 2, 3 lehet, a nagyszülők száma pedig 0, 1, 2, 3, 4. Ez összesen 4-szer 5, azaz 20 lehetőséget ad, melyeket egy táblázatba célszerű elrendezni. A tapasztalatból tudhatjuk a 20 lehetőség mindegyikének százalékos értékét. Tegyük fel, hogy ezek az alábbiak:

nagyszülők száma					
4	6.0	12.0	9.0	3.0	
3	8.0	16.0	12.0	4.0	
2	3.0	6.0	4.5	1.5	
1	2.0	4.0	3.0	1.0	
0	1.0	2.0	1.5	0.5	
	0	1	2	3	gyerekek száma

(Ellenőrizhető, hogy a 20 darab beírt százalék érték összege 100.)

Ha egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{ gyerekek száma}, \quad Y = \text{ nagyszülők száma}$$

akkor az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó 20 lehetséges értéke mindegyikének a valószínűségét (a megfelelő százalék érték alapján) beírva a táblázatba megkapjuk az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

(Ellenőrizhető, hogy a 20 darab beírt valószínűség érték összege 1.)

2. Példa: Hány piros, hány kék – ismét. Az 1. fejezet 5. alfejezében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hény kék van:

$$X = \text{ ahány piros van a kivettek között}$$

$$Y = \text{ ahány kék van a kivettek között}$$

Akkor ott kiszámoltuk annak a valószínűségét, hogy a kivett golyók között pontosan x darab piros és pontosan y darab kék lesz. A válasz ez volt:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{45}{8}}$$

minden olyan x-re és y-ra, melyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségeknek:

$$0 \leq x \leq 8$$

$$0 \leq y \leq 8$$

$$0 \leq 8 - x - y \leq 8$$

Ezekből a valószínűségekből az alábbi táblázatot raktuk ott össze:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.031	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.076	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Vegyük észre, hogy a fenti képlet, illetve ez a táblázat nem más, mint az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása matematikai képlettel, illetve táblázattal megadva..

Kérdés: Mi a valószínűsége annak, hogy $Y < 2X$, azaz a kihúzott kékek száma kevesebb mint a kihúzott pirosak számának a kétszerese?

Válasz: Ha előszedjük középiskolás tudásunkat, és meggondoljuk, hogy az $y < 2x$ egyenlőtlenség milyen $(x;y)$-okra teljesül, akkor könnyen ellenőrizhetjük, hogy azokra az $(x;y)$-okra teljesül, amilyen helyekre 1-eket tettünk az alábbi táblázatban:

y										
8	..0..	..0..	..0..	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	
7	..0..	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
6	..0..	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
5	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
4	..0..	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
3	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
2	..0..	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
1	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
0	..0..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	..1..	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

A kérdezett valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk azokat a valószínűségeket az $(X;Y)$ eloszlásának a táblázatában, melyek az 1-eknek megfelelő helyen vannak. Ezt az összeadást az Excelben a `SUMPRODUCT` (magyarul: `SZORZATÖSSZEG`) utasítással nagyon egyszerű végrehajtani.

3. Műveletek, szabályok

3.1. További műveletek eseményekre

Események különbsége: Az A bekövetkezik, de a B nem. Vagyis A-nak és B-nek a különbsége nem más, mint $A\cap\overline{B}$. A különbség jelölése: $A\backslash B$. Tehát $A\backslash B = A \cap \overline{B}$.

"Maga után vonja": Azt mondjuk, hogy egy B esemény maga után vonja az A eseményt, ha teljesül, hogy amikor a B esemény bekövetkezik, akkor szükségképpen az A esemény is bekövetkezik, azaz a B halmaz része az A halmaznak. Jelölés: $B \subset A$ vagy $A \supset B$.

Teljes eseményrendszer: Véges vagy végtelen sok egymást kizáró eseményeknek egy olyan rendszere, hogy ezeknek az eseményeknek az úniója a biztos esemény. Halmazelméleti nyelven mondva: az eseménytér "partíciója", azaz felbontása egymást kizáró halmazok úniójára.

Események növekvő sorozata: A sorozat bármely eleme maga után vonja a későbbieket:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \ldots$$

Események csökkenő sorozata: A sorozat bármely eleme maga után vonja a korábbiakat:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \ldots$$

Egy csökkenő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$A_1 \cap A_2 = A_2$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = A_4$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = A_5$$

3.2. További szabályok eseményekre

Komplementer szabály: Bármely esemény komlementerének komplementere maga az eredeti esemény.

A sok egyéb, hasonlóan triviális szabály felsorolásától eltekintünk. Azonban – fontossága és furcsasága miatt – felhívjuk még a figyelmet a De Morgan szabályokra:

De Morgan szabály az únióra: Események úniójának komplementere egyenlő a komplementereik metszetével:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}$$

De Morgan szabály a metszetre: Események metszetének komplementere egyenlő a komplementereik úniójával:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \ldots \cup \overline{A_n}$$

3.3. Eloszlás transzformációja

Az új eloszlás valószínűségeinek kiszámolása összegzéssel történik. Ki kell gondolni, hogy az új eloszlás egyes tagjainak valószínűségeit a régi eloszlás mely tagjainak összegeként kapjuk meg.

1. Példa: Hány tagú a nagycsalád? Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettüük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{ gyerekek száma}, \quad Y = \text{ nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Nézzük, hány tagú a nagycsalád, amikor a szükők, gyerekek mellett a nagyszülők is a családdal vannak. A nagycsalád létszáma nyilván $Z = 2 + X + Y$. Ha a fiatal házaspárt véletlenszerűen választjuk akkor X is, Y is valószínűségi változó. A Z eloszlásának mindenegyes tagját az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásából a megfelelő valószínűségek összegeként kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(Z = 2) = 0.010 \\
&\mathrm{P}(Z = 3) = 0.040 = 0.020 + 0.020 \\
&\mathrm{P}(Z = 4) = 0.085 = 0.030 + 0.040 + 0.015 \\
&\mathrm{P}(Z = 5) = 0.175 = 0.080 + 0.060 + 0.030 + 0.005 \\
&\mathrm{P}(Z = 6) = 0.275 = 0.060 + 0.160 + 0.045 + 0.010 \\
&\mathrm{P}(Z = 7) = 0.255 = 0.120 + 0.120 + 0.015 \\
&\mathrm{P}(Z = 8) = 0.130 = 0.090 + 0.040 \\
&\mathrm{P}(Z = 9) = 0.030
\end{aligned}$$

Ha Z lehetséges értékeit és a hozzájuk tapadó valószínűségeket egy táblázatba rendezzük, megkapjuk Z eloszlását. Ezzel az eloszlással kell modelleznünk azt a problámát, ha egy véletlenszerűen választott fiatal házaspárhoz tartozó nagycsalád létszámát akarjuk vizsgálni.

z	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{P}(Z=z)$	0.010	0.040	0.085	0.175	0.275	0.255	0.130	0.030

2. Példa: Három színes (piros vagy kék) golyó valószínűsége. Az 1. fejezet 7. alfejezében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ ahány piros van a kivettek között}$$

$$Y = \text{ ahány kék van a kivettek között}$$

Tekintsük a $Z = X + Y$ valószínűségi változót, ami azt fejezi ki, hogy hány színes (piros vagy kék) golyó van a kihúzott 8 golyó között. **Kérdés:** Mi a valószínűsége annak, hogy $Z = 3$?

Első megoldás: Az $(X;Y)$ eloszlását megadó

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.0317	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.0756	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

táblázatban azokat a cellákat, melyek olyan $(x;y)$ értkeknek felelnek meg, melyekre $x + y = 3$, és összadjuk a cellákban található valószínűségeket:

$$\mathrm{P}(Z = 3) = 0.0327 + 0.0755 + 0.0486 + 0.0086 = 0.1654$$

Második megoldás: Mivel a dobozban a 45 golyó között 25 színes golyó van, és közülük 8-at húzunk ki, a 3 színes golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{25}{3}\binom{45-25}{8-3}}{\binom{45}{8}} = 0.1654$$

3. Példa: Színes (piros vagy kék) golyók. (Az előző példa folytatása.)

Feladat: Határozzuk meg a Z valószínűségi változó eloszlását!

Első megoldás: Az $(X;Y)$ eloszlását megadó fenti táblázatban Z minden lehetséges értékével kapcsolatban egy összeg adja meg a keresett valószínűséget:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z=0) &= 0.001 && = 0.001\\
\mathrm{P}(Z=1) &= 0.005 + 0.004 && = 0.009\\
\mathrm{P}(Z=2) &= 0.019 + 0.027 + 0.008 && = 0.054\\
\mathrm{P}(Z=3) &= 0.033 + 0.076 + 0.049 + 0.009 && = 0.165\\
\mathrm{P}(Z=4) &= 0.031 + 0.102 + 0.106 + 0.040 + 0.005 && = 0.284\\
\mathrm{P}(Z=5) &= 0.016 + 0.072 + 0.108 + 0.067 + 0.017 + 0.001 && = 0.281\\
\mathrm{P}(Z=6) &= 0.004 + 0.026 + 0.054 + 0.048 + 0.019 + 0.003 + 0.000 && = 0.156\\
\mathrm{P}(Z=7) &= 0.001 + 0.005 + 0.013 + 0.015 + 0.009 + 0.002 + 0.000 + 0.000 && = 0.047\\
\mathrm{P}(Z=8) &= 0.000 + 0.000 + 0.001 + 0.002 + 0.001 + 0.001 + 0.000 + 0.000 + 0.000 && = 0.005
\end{aligned}$$

Második megoldás: Mivel a dobozban a 45 golyó között 25 színes golyó van, és közülük 8-at húzunk ki, a z darab színes golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{25}{z}\binom{45-25}{8-z}}{\binom{45}{8}} \qquad (0 \le z \le 8)$$

Ha z helyére behelyettesítjük a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

3.4. Síkbeli eloszlás vetületei

Az új eloszlás valószínűségeinek kiszámolása összegzéssel történik. Ki kell gondolni, hogy az új eloszlás egyes tagjainak valószínűségeit a régi eloszlás mely tagjainak összegeként kapjuk meg.

1. Példa: Fiatal házaspárok - vetítés. Tegyük fel, hogy az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása az alábbi táblázatban adott eloszlás:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Könnyen ellenőrizhető, hogy az X eloszlásának mindenegyes tagját, vagyis a

x x x	0	1	2	3
x $p(x)$ x	0.2	0.4	0.3	0.1

táblázatban álló valószínűségeket az $(X;Y)$ eloszlásából a megfelelő oszlopban található valószínűségek összegeként kapjuk meg:

P(X=1) = 0.060 + 0.080 + 0.030 + 0.020 + 0.010 = 0.2
P(X=2) = 0.120 + 0.160 + 0.060 + 0.040 + 0.020 = 0.4
P(X=3) = 0.090 + 0.120 + 0.045 + 0.030 + 0.015 = 0.3
P(X=4) = 0.030 + 0.040 + 0.015 + 0.010 + 0.005 = 0.1

Könnyű látni, hogy az Y eloszlásának mindenegyes tagját az $(X;Y)$ eloszlásából a megfelelő sorban található valószínűségek összegeként lehet megkapni:

P(Y=4) = 0.060+ 0.120+ 0.090+ 0.030 = 0.30
P(Y=3) = 0.080+ 0.160+ 0.120+ 0.040 = 0.40
P(Y=2) = 0.030+ 0.060+ 0.045+ 0.015 = 0.15
P(Y=1) = 0.020+ 0.040+ 0.030+ 0.010 = 0.10
P(Y=0) = 0.010+ 0.020+ 0.015+ 0.005 = 0.05

2. Példa: Piros és kék golyók – vetítés. Az 1. fejezet 7. alfejezében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ ahány piros van a kivettek között}$$

$$Y = \text{ ahány kék van a kivettek között}$$

Ott meghatároztuk az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását, egy táblázatot kaptunk. Gondoljuk meg ennek a példának a kapcsán is, hogy hogyan lehet $(X;Y)$ eloszlásából X, illetve Y eloszlását meghatározni!

Első megoldás: Az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását jelentő táblázat oszlopainak összegzésével kapjuk az X eloszlását:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(X=0)= & 0.000+0.001+0.004+0.016+0.031+0.033+0.019+0.005+0.001 & =0.109\\
\mathrm{P}(X=1)= & 0.000+0.005+0.026+0.072+0.102+0.076+0.027+0.004 & =0.312\\
\mathrm{P}(X=2)= & 0.001+0.013+0.054+0.108+0.106+0.049+0.008 & =0.339\\
\mathrm{P}(X=3)= & 0.002+0.015+0.048+0.067+0.040+0.009 & =0.181\\
\mathrm{P}(X=4)= & 0.001+0.009+0.019+0.017+0.005 & =0.051\\
\mathrm{P}(X=5)= & 0.001+0.002+0.003+0.001 & =0.008\\
\mathrm{P}(X=6)= & 0.000+0.000+0.000 & =0.001\\
\mathrm{P}(X=7)= & 0.000+0.000 & =0.000\\
\mathrm{P}(X=8)= & 0.000 & =0.000
\end{array}$$

Teljesen hasonló módon – a táblázat sorainak összegzésével – kapjuk az Y eloszlását:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(Y=8)= & 0.000 & =0.000\\
\mathrm{P}(Y=7)= & 0.001+0.000 & =0.001\\
\mathrm{P}(Y=6)= & 0.004+0.005+0.001 & =0.010\\
\mathrm{P}(Y=5)= & 0.016+0.026+0.013+0.002 & =0.057\\
\mathrm{P}(Y=4)= & 0.031+0.072+0.054+0.015+0.001 & =0.174\\
\mathrm{P}(Y=3)= & 0.033+0.102+0.108+0.048+0.009+0.001 & =0.301\\
\mathrm{P}(Y=2)= & 0.019+0.076+0.106+0.067+0.019+0.002+0.000 & =0.289\\
\mathrm{P}(Y=1)= & 0.005+0.027+0.049+0.040+0.017+0.003+0.000+0.000 & =0.142\\
\mathrm{P}(Y=0)= & 0.001+0.004+0.008+0.009+0.005+0.001+0.000+0.000+0.000 & =0.027
\end{array}$$

Második megoldás: Az X eloszlásának meghatározása közvetlenül is történhet, hiszen ha a dobozban a 45 golyó között 10 piros golyó van, és közülük 8-at húzunk ki, akkor az x darab piros golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{45-10}{8-x}}{\binom{45}{8}} \qquad (0 \le x \le 8)$$

Ha x helyére behelyettesítjük a $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

Az Y eloszlásának meghatározása is hasonlóan történhet, hiszen ha a dobozban a 45 golyó között 15 kék golyó van, és közülük 8-at húzunk ki, akkor az y darab kék golyó valószínűsége:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{45-15}{8-y}}{\binom{45}{8}} \qquad (0 \le y \le 8)$$

Ha y helyére behelyettesítjük a $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ értékeket, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az első megoldásban.

3.5. *** További szabályok valószínűségekre

1. **Összegzési szabály három tetszőleges eseményre**: Ha A,B,C tetszőleges események, akkor

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A\cup B\cup C) \quad = & \\
& \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)\\
- \ & \mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)\\
+ \ & \mathrm{P}(A\cap B\cap C)
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldalán

- az első sorban $\binom{3}{1} = 3$ tag áll, az egyes események valószínűségei $+$ jelekkel
- a második sorban $\binom{3}{2} = 3$ tag áll, az eseményekből alkotható párok metszeteinek valószínűségei $-$ jelekkel
- a harmadik sorban $\binom{3}{3} = 1$ tag áll, a három esemény metszetének valószínűsége $+$ jellel

2. **Összegzési szabály több (tetszőleges) eseményre – avagy "Poincaré" vagy "szita" formula**: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) \\ - \; & \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) - \ldots - \mathrm{P}(A_{n-1} \cap A_n) \\ + \; & \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + \mathrm{P}(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) \\ \vdots & \\ + \; & (-1)^{n+1}\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldálán

- az első sorban $\binom{n}{1} = n$ tag áll, az egyes események valószínűségei $+$ jelekkel
- a második sorban $\binom{n}{2}$ tag áll, az eseményekből alkotható párok metszeteinek valószínűségei $-$ jelekkel
- a harmadik sorban $\binom{n}{3}$ tag áll, az eseményekből alkotható hármasok metszeteinek valószínűségei $+$ jelekkel
- az utolsó sorban $\binom{n}{n} = 1$ tag áll, az összes esemény metszetének valószínűsége $+$ vagy $-$ jellel attól függően, hogy n páratlan vagy páros

3. **Folytonossági szabály események növekvő sorozatára**: Ha végtelen sok esemény növekvő sorozatot alkot, akkor uniójuk valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek határértékével: $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$

4. **Folytonossági szabály események csökkenő sorozatára**: Ha végtelen sok esemény csökkenő sorozatot alkot, akkor metszetük valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek határértékével: $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$

Feladat: Mindenki hűtlenkedik?

Jöhet ide

4. Folytonos egyenletes eloszlás

4.1. Folytonos egyenletes eloszlás

1. Egyenletes eloszlás intervallumon Tekintsünk egy véges, pozitív hosszúságú I intervallumot. Tegyük fel, hogy valaki az intervallumban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az I intervallum pontjai, azaz az eseménytér az I intervallum. Ha az I intervallum bármely részintervalluma esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részintervallumba esik

$$\text{részintervallum valószínűsége} = \frac{\text{részintervallum hossza}}{I \text{ hossza}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az I intervallumon. Ilyenkor egy részintervallum valószínűsége csak a részintervallum hosszától függ, de attól, hogy maga a részintervallum, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részintervallomot eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részintervallum valószínűsége nem változik meg. Ez e két tény indokolja az "egyenletes eloszlás" elnevezést.

2. Egyenletes eloszlás síkbeli halmazon: Tekintsünk egy véges, pozitív területű S halmazt a síkon. Tegyük fel, hogy valaki a halmazban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az S halmaz pontjai, azaz az eseménytér az S halmaz. Ha az S halmaz bármely részhalmaza esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részhalmazba esik

$$\text{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\text{részhalmaz területe}}{\text{S területe}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az S halmazon. Ilyenkor egy részhalmaz valószínűsége csak a részhalmaz területétől függ, de attól, hogy maga a részhalmaz, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részhalmazt eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részhalmaz valószínűsége nem változik meg.

3. Egyenletes eloszlás térbeli halmazon: Anélkül, hogy részleteznénk, megemlítjük, hogy egy véges, pozitív térfogatú S térrészen vett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\text{részhalmaz térfogata}}{S \text{ térfogata}}$$

Tekinteve, hogy a hosszúság, a terület, a térfogat számítása általában a geometria körébe tartozik, az ilyen valószínűségszámítási problémákat **geometriai problémák**nak is nevezzük.

Egyenletes eloszlású, független koordináták: Megemlítjük azt a nyilvánvaló tényt, hogy ha egy síkbeli, illetve térbeli pont koordinátáit egymástól függetlenül választjuk meg egy-egy intervallumban, akkor a pont egyenletes eloszlású lesz az intervallumok által (direktszorzatként) meghatározott téglalapban, illetve vagy téglatestben,

Feladat: Átrepül-e a teniszlabda a kerítésünkön? Kerítésünk 3 cm átmérőjű függőleges, hosszú rudakból áll. A rudak 20 cm periódussal ismétlődnek, a köztük lévő rések 17 cm-esek. A kerítésnek háttal állva, néhány méterről, merőlegesen nekidobok a kerítésnek egy 5 cm átmérőjű teniszlabdát. Mi a valószínűsége, hogy a teniszlabda a vasrudak érintése nélkül átrepül közöttük?

Megoldás: Amikor a teniszlabda eléri vagy elérné az oszlopok síkját, a középpontnak a tőle balra legközelebbi rúd középvonalától való távolsága véletlentől függ, jelöljük a cm-ekben vett távolságot X-szel, így X lehetséges értékei a $[0; 20]$ intervallumot teszik ki, és X nyilván egyenletes eloszlást követ. Az érintés nélküli átrepülés feltétele, hogy az $4 < X < 16$ egyenlőtlenségek teljesüljenek. Ennek valószínűsége:

$$\text{P(érintés nélküli átrepül)} = \frac{16-4}{20} = \frac{12}{20} = 0.6$$

Feladat: Átrepül-e a teniszlabda a szomszéd kerítésén? A szomszéd kerítése ugyanilyen függőleges rudakbkól áll, de az ő kerítésében vízszintes rudak is vannak 30 cm-es periódussal. Mi a valószínűsége, hogy a szomszéd kerítésén átrepül a teniszlabda?

1. Megoldás: Amikor a teniszlabda eléri vagy elérné a kerítés síkját, a középpontnak a tőle balra legközelebbi rúd középvonalától való távolsága legyen X, az alatta lévő vízszintes rúd középvonalától való távolsága legyen Y. Az $(X; Y)$ lehetséges értékei a $[0; 20]$ és a $[0; 30]$ intervallumok által meghatározott téglalapot teszik ki, és $(X; Y)$ nyilván egyenletes eloszlást követ. Az érintés nélküli átrepülés feltétele, hogy az $4 < X < 16$, $4 < Y < 26$ egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis $(X; Y)$ egy kisebb téglalapban legyen. Ennek valószínűsége a két téglalap területének a hányadosa:

$$\text{P(érintés nélküli átrepül)} = \frac{(16-4)\cdot(26-4)}{20\cdot 30} = \frac{12\cdot 22}{600} = 0.44$$

Megjegyzés: X és Y függetlensége miatt így is okoskohattunk volna:

$$\text{P(érintés nélküli átrepül)} =$$

$$= \text{P}(4 < X < 16, 4 < Y < 26) = \text{P}(4 < X < 16)\cdot\text{P}(4 < Y < 26) = \frac{12}{20}\cdot\frac{22}{30} = 0.44$$

Feladat: Utazás busszal, metróval. Reggelente busszal és metróval megyek az egyetemre, és az átszálás közben még a reggelimet is megveszem. A busz 10 percenként jár, a metró 5 percenként. Mivel az induláskor nem taktikázok, a megállóban a buszra való X várakozási időm egyenletes eloszlású 0 és 10 perc között. Kiszámíthatlan, hogy a reggeli vásárlása hogyan alakul, ezért a metró állomáson a várakozással eltöltött Y időm X-től függetlenül egyenletes eloszlású 0 és 5 perc között.

- Mi a valószínűsége, hogy a metróra többet kell várnom, mint a buszra?
- Mi a valószínűsége, hogy a várakozással eltöltött összes időm több, mint 4 perc?

Megoldás:

- Az $(X;Y)$ lehetséges értékei a $[0;10]$ és a $[0;5]$ intervallumok által meghatározott téglalapot teszik ki, és ezen a téglalapon $(X;Y)$ egyenletes eloszlást követ. Az $Y > X$ esemény ebben a téglalapban egy háromszöget jelöl ki, melynek területe a téglalap területének a negyede. Ezért

$$\text{P(a metróra többet kell várnom, mint a buszra)} = \frac{1}{4} = 0.25$$

- Az $X + Y > 4$ esemény a téglalapban egy ötszöget határoz meg, melynek komplementere egy derékszögű háromszög. A derékszögű háromszög területe 8 terület egység, ezért az ötszögé 50 - 8 = 42 terület egység. A keresett valószínűség:

$$\text{P(a várakozással eltöltött összes időm több, mint 4 perc)} = \frac{42}{50} == 0.82$$

Feladat: Randevú. Jancsi és Juliska déli 12 óra és 1 óra között randevúznak. Azonban a randevú menetébe és sikerébe beleszól a véletlen is: az 1 órás időtartam alatt egymástól független pillanatban érkeznek, mindketten egyenletes eloszlás szerint, és – megbeszélésük szerint – 20 percet várakoznak, aztán elmennek. Így aztán vagy találkoznak, vagy nem. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

1. Megoldás: Jancsi érkezési pillanatát jelöljük X-szel, Juliskáét Y-nal. Mivel X és Y függetlenek és egyenletes eloszlásúak 0 és 1 között, az $(X;Y)$ pont egyenletes eloszlású a $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ pontok által meghatározott négyzetben. Nyilvánvaló, hogy a találkozó létrejöttének feltétele, hogy az

$$Y \geq X - 1/3 \quad , \quad Y \leq X + 1/3$$

egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis az $(X;Y)$ pontnak az

$$y = x - 1/3$$

egyenletű egyenes és az

$$y = x + 1/3$$

egyenletű egyenes közötti tartományban kell lenni. Ez a tartomány egy hatszög. A hatszög komplementere a négyzetben két derékszögű háromszög, melyeknek befogyói $2/3$ hosszúak. A két háromszögből egy kis négyzetet lehet összerakni, melynek oldalhossza $2/3$. Ezért a két háromszög együttes területe $4/9$, hatszögé pedig $1 - 4/9 = 5/9$. A keresett valószínűség egyenlő a hatszög területe osztva a négyzet területével (ami r1), ezért:

$$\text{P(találkoznak)} = \frac{5}{9} = 0.5556 = 0.57$$

2. Megoldás: Az előző megoldásban – helyesen – folytonos modellt használtunk, most – kissé pontatlan, de tanulságos – diszkrét modellt adunk a problémára: az időt egész percekben fogjuk mérni. Ilyen szemlélet mellett a fiatalok érkezési pillanatai (jelöljük ezeket most is X -szel és Y -nal) egyenletes eloszlást követnek az $\{1, 2, \ldots, 59, 60\}$ almazon, és az $(X;Y)$ számpár egyenletes eloszlást követ a 3600 elemből álló halmazon, melyet az alábbi ábrán szemléltetünk:

	1	2	3	4	5	6	.	.	.	55	56	57	58	59	60	X
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
55	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
56	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
57	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
58	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
59	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
60	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
Y																

A találkozó létrejöttének feltétele most az, hogy az

$$Y \geq X - 20 \quad , \quad Y \leq X + 20$$

egyenlőtlenségek teljesüljenek, vagyis az $(X;Y)$ pontnak az az alábbi ábrán $*$-gal jelölt pontok halmazába kell esni.

	1	.	.	.	20	21	.	.	.	40	41	.	.	.	60	X
1	*	*	*	*	*	*										
.	*	*	*	*	*	*	*									
.	*	*	*	*	*	*	*	*								
.	*	*	*	*	*	*	*	*	*							
20	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*						
21	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*					
.		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*				
.			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
.				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
40					*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
41						*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.							*	*	*	*	*	*	*	*	*	
.								*	*	*	*	*	*	*	*	
.									*	*	*	*	*	*	*	
60										*	*	*	*	*	*	
Y																

Egyszerű elemi feladat megszámolni, hogy hány $*$ található ezen az ábrán: 2040. Tehát a találkozó valószínűségére – ezzel a modellel – az alábbi eredményt kapjuk:

$$\text{P(találkoznak)} = \frac{2\,040}{3\,600} = 0.5667 = 0.57$$

Az eredményt összevetve az 1. megoldás eredményével látjuk, hogy a diszkrét modell kb. 0.01 -dal nagyobb valószínűséget ad, mint a folytonos modell. Ez a hiba nem nagy, de jelzi, hogy oda kell figyelni arra, hogy folytonos problémát folytonos modellel kezeljünk.

3. Megoldás: Ha percek helyett másodpeercekkel dolgozunk a modellben, akkor az összes esetek száma 3 600 -nak a négyzete, ami 12 960 000, a kedvező esetek számára pedig 7 202 400 adódik, amiből a

$$\text{P(találkoznak)} = \frac{7\,202\,400}{12\,960\,000} = 0.5557$$

valószínűséget kapjuk. Ezt az eredményt összevetve az 1. megoldás eredményével látjuk, hogy ez a diszkrét modell már csak kb. 0.001 -del nagyobb valószínűséget ad mint a folytonos modell.

Feladat: Buffon féle tű probléma. Párhuzamos egyeneseket húzunk egy nagy papírra (vagy a földre) egymástól 20 cm távolságra. Egy 10 cm hosszú tűt elég magasról hetykén leejtünk. A tű vagy metszi valamelyik egyenest, vagy egyiket sem metszi. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

Megoldás: Jelöljük X-szel a tű által meghatározott egyenesnek a párhuzamos egyenesekkel bezárt hegyes szögét radiánban mérve, Y-nal pedig a tű középpontjának a hozzá legközelebb lévő egyenestől való távolságát. Nyilván $0 \leq X \leq \pi/2$, illetve $0 \leq Y \leq 10$. X és Y függetlensége miatt $(X;Y)$ egyenletes eloszlású a $[\,0\,;\,\pi/2\,]$, illetve $[\,0\,;\,10\,]$ intervallumok által meghatározott 5π területű T téglalapon. Egyszerű trigonometriai probléma annak ellenőrzése, hogy a metszés pontosan akkor áll fenn, ha $Y < 5\sin(X)$, azaz az $(X;Y)$ pont az

$$y = 5\sin(x)$$

egyenletű görbe alatti A tartományba esik esik. Ezért a kereset valószínűség:

$$\text{P(metszés)} = \frac{A \text{ területe}}{T \text{ területe}} = \frac{\int_0^{\pi/2} 5\sin(x)\,dx}{5\pi} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

4.2. RAND utasítás

Az Excelben a 0 és 1 közötti értékeket felvevő

`RAND(),  magyarul VÉL()`

utasítás olyan véletlen számot állít elő, mely egyenletes eloszlást követ a $[0;1]$ intervallumon. Az üres zárójelpár nem elírás: az Excel formai szabályai szerint a `RAND` mögé oda kell írni a `()` üres zárójelpárt. A `RAND` utasítással generált véletlen számokat **random szám**oknak hívjuk. Ha valaki a `RANDBETWEEN` utasítással generált véletlen számokat is**random szám**oknak hívja, akkor illik utalni rá, hogy 0 és 1 közötti, vagy egész értékű-e a véletlen szám.

Jelölés: Jegyzetünkben a `RAND` utasítás által előállított véletlen szám jelölésére RND-t írunk. Több véletlen szám használata esetén azokat – a matematika szokásai szerint – indexezéssel különböztetjük meg egymástól: az RND_1 és RND_2 jelölésekben az indexek arra utalnak, hogy két különböző véletlen számról van szó. Az Excel nem használ indexeket, az Excelben `RAND` utasítás többszöri alkalmazása különböző, független véletlen számokat jelentenek. Például a

`2*RAND() + 3*RAND()`

Excel utasításra jegyzetünkben az indexeket is tartalmazó

$$2\,\text{RND}_1 + 3\,\text{RND}_2$$

képlettel utalunk. Ha indexek nélkül

$$2\,\text{RND} + 3\,\text{RND}$$

írnánk, akkor matematikai

$$2\,\text{RND} + 3\,\text{RND} \;=\; 5\,\text{RND}$$

összevonás miatt a

`2*RAND() + 3*RAND()`

Excel utasítást helytelenül összekeverhetnénk a

`5*RAND()`

utasítással.

4.3. Random számok tulajdonságai

A `RAND` utasítást az Excelben úgy találták ki, hogy a random számokra igazak az alábbiak:

1. Akármilyen x szám esetén annak a valószínűsége, hogy egy random szám pontosan egyenlő x-szel, nulla:

$$\mathrm{P}(\mathrm{RND} = x) = 0$$

2. $0 \le a \le b \le 1$ esetén annak a valószínűsége, hogy egy random szám az a és b által meghatározott intervallumba esik, egyenlő az intervallum hosszával. Az, hogy az intervallum zárt, nyitott vagy félig zárt, félig nyitott, közömbös:

$$\mathrm{P}(a \le \mathrm{RND} \le b) = b - a$$
$$\mathrm{P}(a \le \mathrm{RND} < b) = b - a$$
$$\mathrm{P}(a < \mathrm{RND} \le b) = b - a$$
$$\mathrm{P}(a < \mathrm{RND} < b) = b - a$$

3. Bármely x számra, ami 0 és 1 között van, igaz, hogy

$$\mathrm{P}(\mathrm{RND} \le x) = \mathrm{P}(\mathrm{RND} < x) = x$$

4. A random számok fontos tulajdonsága, hogy ha két random számból, mint koordinátákból egy számpárt rakunk össze, akkor az $(\mathrm{RND}_1; \mathrm{RND}_2)$ pont egyenletes eloszlást követ az egységnyi oldalú négyzetben. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A a négyzetnek akármilyen részhalmaza, akkor

$$\mathrm{P}\left(\ (\mathrm{RND}_1; \mathrm{RND}_2) \in A\ \right) = A \text{ területe}$$

5. Ha három random számból, mint koordinátákból egy $(\mathrm{RND}_1; \mathrm{RND}_2; \mathrm{RND}_3)$ pontot rakunk össze a 3-dimenziós térben, akkor ez a pont egyenletes eloszlást követ a tér egységnyi oldalú kockájában. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A a kockának akármilyen részhalmaza, akkor

$$(\mathrm{RND}_1; \mathrm{RND}_2; \mathrm{RND}_3) \in A\ ) = \text{ az } A \text{ halmaz térfogata}$$

6. Ha n random számból, mint koordinátákból egy $(\mathrm{RND}_1; \mathrm{RND}_2; \ldots; \mathrm{RND}_n)$ pontot rakunk össze az n-dimenziós térben, akkor ez a pont egyenletes eloszlást követ az n-dimenziós tér egységnyi oldalú kockájában. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy ha A az n-dimenziós kockának akármilyen részhalmaza, akkor

$$\mathrm{P}\left(\ (\mathrm{RND}_1; \mathrm{RND}_2; \ldots; \mathrm{RND}_n) \in A\ \right) = \text{ az } A \text{ halmaz } n\text{-dimenziós térfogata}$$

7. Megjegyezzük, hogy azok a tulajdonságok, melyeket az előző három pontban fogalmaztunk meg, igazából azt jelentik, hogy ha több random számot állítunk elő Excellel, akkor azoknak egymáshoz semmi közük sincsen, azok egymástól függetlenek. A függetlenség matematikai definícióját később tanuljuk.

4.4. Lineáris transzformációk

1. **Nyújtás**
Ha az RND random számot
megszorzunk egy 1-nél nagyobb a számmal,
akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet a RND -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
a RND egyenletes eloszlást követ a $[0; a]$ intervallumon.

2. **Zsugorítás**
Ha az RND random számot
megszorzunk egy 1-nél kisebb pozitív a számmal,
akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet a RND -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
a RND egyenletes eloszlást követ a $[0; a]$ intervallumon.

3. **Eltolás**
   Ha az RND random számhoz
   hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(\text{RND} + b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(RND + b)$ egyenletes eloszlást követ a $[b; b + 1]$ intervallumon.

4. **Nyújtás és eltolás (vagy: zsugorítás és eltolás)**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy pozitív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\text{RND} + b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND + b)$ egyenletes eloszlást követ a $[b; a + b]$ intervallumon.

5. **Tükrözés az origóra**
   Ha az RND random számnak
   vesszük az ellentettjét (vagyis megszorzunk (-1)-gyel),
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(-\text{RND})$-vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(-RND)$ egyenletes eloszlást követ a $[-1; 0]$ intervallumon $(a < 0)$.

6. **Tükrözés és nyújtás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1-nél nagyobb abszolút értékű negatív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\text{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND)$ egyenletes eloszlást követ az $[a; 0]$ intervallumon $(a < 0)$.

7. **Tükrözés és zsugorítás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy egy 1-nél kisebb abszolút értékű negatív a számmal,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\text{RND})$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND)$ egyenletes eloszlást követ az $[a; 0]$ intervallumon $(a < 0)$.

8. **Tükrözés, nyújtás és eltolás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1-nél nagyobb abszolút értékű negatív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\text{RND} + b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND + b)$ egyenletes eloszlást követ a $[a + b; b]$ intervallumon.

9. **Tükrözés, zsugorítás és eltolás**
   Ha az RND random számot
   megszorzunk egy 1-nél kisebb abszolút értékű negatív a számmal, és a szorzathoz hozzáadunk egy b számot,
   akkor egy új valószínűségi változót kapunk, melyet $(a\,\text{RND} + b)$ -vel szokás jelölni. Nyilvánvaló, hogy
   $(a\,RND + b)$ egyenletes eloszlást követ a $[a + b; b]$ intervallumon $(a < 0)$.

5. Feltételes valószínűség és eloszlás

5.1. Feltételes valószínűség

Legyenek A és B események valamely véletlen jelenséggel kapcsolatban. Képzeljük el, hogy N kísérletet végzünk a jelenségre. Jelöljük N_A-val, hogy hányszor következik be az A esemény, és jelöljük $N_{A\cap B}$ -vel, hogy hányszor következik be az A-val együtt a B is. A következő hányadost **feltételes relatív gyakorság**-nak nevezzük:

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_A}$$

Ez a tört azt mutatja, hogy azok között az esetek között, amikor A bekövetkezik, hányad részben, milyen arányban következik be A-val együtt a B is. A számlálót is és a nevezőt is N-nel osztva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_A} = \frac{\frac{N_{A\cap B}}{N}}{\frac{N_A}{N}} \approx \frac{\text{P}(A\cap B)}{\text{P}(A)}$$

vagyis - sok kísérlet esetén - a feltételes relatív gyakorság körülbelül egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Ezt az értéket nevezzük **a B esemény feltételes valószínűségének, feltéve, hogy A bekövetkezik**. A feltételes valószínűséget $\mathrm{P}(B|A)$-vel jelöljük:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Ezt a formulát a **valószínűségek osztási szabály**ának is nevezzük. Ha $\mathrm{P}(A)0$, akkor a a hányados nem definiált. Ilyenkor a feltételes valószínűség ezzel a hányadossal nem értelmezhető.

Megjegyzés: Ha B maga után vonja A-t, vagyis $B \subset A$, akkor $A \cap B = B$, és ilyenkor az osztási szabály így egyszerűsödik:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Megjegyzés: Hasonlóképpen értelmezhető az A feltételes valószínűsége, feltéve, hogy a B bekövetkezik:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

illetve, ha A maga után vonja B-t, vagyis $A \subset B$, akkor

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$$

Feladat: Ha van fiú, van-e lány is? Ha egy véletlenszerűen választott kétgyerekes családban van fiú, akkor mi a valószínűsége annak, hogy lány is van?

Megoldás:

$$\mathrm{P}(\text{ van lány } | \text{ van fiú }) = \frac{\mathrm{P}(\text{ van fiú és van lány })}{\mathrm{P}(\text{ van fiú })} = \frac{\left(\frac{2}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{3}$$

1. Megjegyzés: Egy véletlenszerűen választott kétgyerekes család gyerekeit – statisztikai szempontból – helyettesíthetjük két szabályos érmével: mondjuk a "fej" jelentsen "fiú"-t, az írás jelentsen "lány"-t. Dobjuk fel a két érmét sokszor (100-szor, 200-szor, még többször), és azon esetek között, amikor van fej (azaz van fiú a családban), megnézhetjük, hogy hányadrészben van írás is (azaz van lány a családban). Az arány körülbelül 2/3 lesz.

2. Megjegyzés: Ha az érméket számítógéppel szimuláljuk, akkor a nagy számú kísérlet elvégzése sem jelent gondot. Hajrá!

Feladat: Tényleg beteg? Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég vizsgálták, és a vizsgálat betegnek jelezte. Ő nagyon megijedt. Nyugtassuk meg barátomat, hogy nem kell megijednie: a vizsgálat eredményének ismeretében sem túl valószínű, hogy a kérdéses betegségben szenved.

Megoldás:

$$\mathrm{P}(\text{ beteg } | \text{ betegnek diagnosztikálják })$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg és betegnek diagnosztikálják })}{\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják })}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják } | \text{ beteg })}{\mathrm{P}(\text{ beteg })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják } | \text{ beteg })+\mathrm{P}(\text{ nem beteg })\cdot\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják } | \text{ nem beteg })}$$

$$= \frac{0.001 \cdot 0.8}{0.001 \cdot 0.8 + 0.999 \cdot 0.1}$$

$$= 0.008$$

Látjuk, hogy annak az esélye, hogy a barátom beteg, ilyen információk mellett csak 8 ezred, ami még 1 százaléknál is kisebb, tehát egyáltalán nem sok.

Megjegyzés: Ilyen rosszul működő teszt esetén – ha nincs más lehetőség, és megengedhető, akkor – természetes ötlet, hogy több viszágalatot hajtsunk végre, és azok eredményéből következtessünk a helyzetre. Ezt az ötletet később, a függetlenség fogalmának bevezetése után fogjuk elemezni.

5.2. Szorzási szabályok

Szorzási szabály két eseményre:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B|A)$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy két esemény mindegyike bekövetkezik úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- és szorzunk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett.

Szorzási szabály három eseményre:

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B|A)\ \mathrm{P}(C|A \cap B)$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy három esemény mindegyike bekövetkezik úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- és szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadik bekövetkezik, feltéve, hogy az első és a második bekövetkezett.

Szorzási szabály több, pl. öt eseményre:

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$$
$$= \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(A_2|A_1)\ \mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\ \mathrm{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)\ \mathrm{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy öt esemény mindegyike bekövetkezik úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,
- ezután szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadik bekövetkezik, feltéve, hogy az első és a második bekövetkezett,
- majd szorzunk annak a valószínűségével, hogy a negyedik bekövetkezik, feltéve, hogy az első, a második és a harmadik bekövetkezett,
- és végül szorzunk annak a valószínűségével, hogy az ötödik bekövetkezik, feltéve, hogy az első, a második, a harmadik és a negyedik bekövetkezett.

Megjegyzés: A szorzási szabályokban az események sorrendje tetszőleges lehet. Például az A, B sorrrend helyett lehet a sorrend B, A:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(A|B)$$

Az A, B, C sorrrend helyett lehet a sorrend A, C, B:

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A \cap C \cap B) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(C|A)\ \mathrm{P}(B|A \cap C)$$

De az A, B, C sorrrend helyett lehet a sorrend akár C, B, A is:

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(C \cap B \cap A) = \mathrm{P}(C)\ \mathrm{P}(B|C)\ \mathrm{P}(A|B \cap C)$$

Feladat: Születésnapok.

5.3. Fa-gráf valószínűségekkel súlyozva

Feltételes valószínűségekkel kapcsolatos problémák esetén gyakran segít a gondolkodásban, számolásban, ha rajzolunk a problémához kapcsolódóan egy valószínűségekkel súlyozott fa-gráfot. Egy *valószínűségekkel súlyozott fa-gráf* valami ehhez hasonlót jelent:

- Rajzolj egy papír aljára egy pontot. Ezt a pontot *a fa gyökeré*nek nevezzük.
- Most húzzál a pontból valahány – mondjuk – három szakaszt felfelé. Ezeket a szakaszokat a *gyökérből kiinduló ágak*nak nevezzük. Írd az első ág mellé – mondjuk – a 0.2 értéket, a második ág mellé – mondjuk – a 0.3 értéket, a harmadik ág mellé – mondjuk – a 0.5 értéket. Ezeket az értékeket *súlyok*nak nevezzük. Képzeld el, hogy egy bogár a gyökérből indulva mászik felfelé, és amikor egy elágazáshoz ér, a súlyoknak megfelelő valószínűségekkel választ az egyes ágak közül, hog aztán azob az ágon másszon tovább felfelé.
- Az első ág végénél legyen megint egy elágazás – mondjuk – két ággal. Írd az ágak mellé – mondjuk – a 0.4, illetve a 0.6 súlyokat. Ilyen valószínűségekkel megy rá a bogár ezekre az ágakra.
- A második ág végénél legyen szintén egy elágazás – mondjuk – négy ággal. Írd minden ág mellé – mondjuk – a 0.25 súlyokat. Ilyen valószínűséggel megy a bogár mindenegyes ágra.
- A harmadik ág végénél is legyen egy elágazás – mondjuk – hat ággal. Írd az ágak mellé a 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.1; 0.5 súlyokat. Ilyen valószínűségekkel megy a bogár ezekre az ágakra.
- Vegyük észre. hogy minden elágazásnál az odaírt súlyok összege 1.
- Elképzelhetünk még további elágazásokat és súlyokat. A bogár mindig a fa teteje felé megy (távolodik a gyökértől), és minden elágazásnál az ott megadott súlyoknak megfelelő valószínűségek szerint választja meg, hogy merre menjen tovább, amíg egyszercsak nem tud továbbmenni, mert ág már nincs tovább.
- A szorzási szabály alapján kézenfekvő, hogy milyen valószínűséggel jut el a bogár a fa egyes végződéseibe: *azokat a súlyokat kell összeszorozni, melyek a gyökérből kiindulva a szóbanforgó végződéshez vezető út mentén találhatóak.*

Ha netán ez így leírva nem volt érthető vagy meggyőző, akkor – sebaj – majd órán elmondjuk, megmutatjuk, akkor szép lesz.

5.4. *** További szorzási szabályok

Megjegyzés: Van, amikor eseményeknek olyan sorozatával van dolgunk, hogy a sorozat bármely eleme maga után vonja a korábbiakat, azaz

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \dots$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy eseményeknek egy **csökkenő sorozat**ával van dolgunk. Egy csökkenő sorozat esetén nyilván fennállnak az alábbiak:

$$A_2 = A_1 \cap A_2$$

$$A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$A_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

$$A_5 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

Ezért a szorzási szabály pl. öt eseményre így egyszerűsödik:

$$\mathrm{P}(A_5) = \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(A_2|A_1)\ \mathrm{P}(A_3|A_2)\ \mathrm{P}(A_4|A_3)\ \mathrm{P}(A_5|A_4)$$

Tehát csökkenő esemény sorozat esetén annak a valószínűségét, hogy ötödik esemény bekövetkezik, úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- ezt megszorozzuk annak a valószínűségével, hogy a második bekövetkezik, feltéve, hogy az első bekövetkezett,

- ezután szorzunk annak a valószínűségével, hogy a harmadik bekövetkezik, feltéve, hogy a második bekövetkezett,
- majd szorzunk annak a valószínűségével, hogy a negyedik bekövetkezik, feltéve, hogy a harmadik bekövetkezett,
- és végül szorzunk annak a valószínűségével, hogy az ötödik bekövetkezik, feltéve, hogy a negyedik bekövetkezett.

Megjegyzés: Végtelen sok esemény csökkenő sorozata esetén a szorzási szabály így fest: Ha A-val jelöljük a végtelen sok esemény metszetét, akkor

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(A_2|A_1)\ \mathrm{P}(A_3|A_2)\dots$$

Tehát annak az eseménynek a valószínűségét hogy

a végtelen sok $A_1, A_2, A_3, \dots$ esemény mindegyike bekövetkezik

úgy lehet kiszámolni, hogy

- vesszük az első esemény valószínűségét,
- szorzunk a másodiknak az elsőre vonatkozó feltételes valószínűségével,
- szorzunk a harmadiknak a másodikra vonatkozó feltételes valószínűségével,
- és így tovább folytatjuk a szorozgatást a végtelenségig úgy, hogy
- mindig a soron következő eseménynek az őt megelőzőre vonatkozó feltételes valószínűségével szorzunk.

Technikailag egy ilyen végtelen sok tényezőből álló szorzatot ahhoz hasonlóan kell kezelni, mint ahogy a végtelen sok tagból álló összegeket kezeljük: a véges sok tényezőből álló

$$\mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(A_2|A_1)\ \dots\ \mathrm{P}(A_n|A_{n-1})$$

szorzatnak $n \to \infty$ mellett a határértéket veszünk, vagyis

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(A_2|A_1)\ \dots\ \mathrm{P}(A_n|A_{n-1})$$

5.5. Teljes valószínűség formulája és Bayes formula

Teljes esemény rendszer: Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást kizáróak és úniójuk a biztos esemény. A teljes eseményrendszer tagjai közül a 0 valózsínűségűeket eldobhatjuk, ezért felételezzük, hogy $\mathrm{P}(A_i) \neq 0$ minden i-re.

Teljes valószínűség formulája: Legyen $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer, B pedig tetszőleges esemény. Ekkor:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(B|A_2) + \dots \mathrm{P}(A_n)\cdot\mathrm{P}(B|A_n)$$

Bayes formula: Ha a jelenség lezajálasa során valahogyan megtudjuk, hogy egy B esemény bekövetkezett, akkor kérdezhetjük: Ez a feltétel hogyan módosítja az egyes A_i események esélyeit? A választ a $\mathrm{P}(A_i|B)$ feltételes valószínűség adja, amit az alábbi képlettel számolhatunk ki:

$$\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(A_i \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A_i)\cdot\mathrm{P}(B|A_i)}{\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(B|A_2) + \dots \mathrm{P}(A_n)\cdot\mathrm{P}(B|A_n)}$$

Példa: Valószínűségek helyett százalékok. Ebben a példában semmi véletlen sincs, mégis segíthet a fenti két formula megemésztésében. Tegyük fel, hogy egy ládában sok, mondjuk 1000, fából és vasból készült színes golyó van. Tegyük fel, hogy a golyók

50%-a piros,	30%-a zöld,	20%-a kék,	továbbá, hogy
a pirosak 40%-a,	a zöldek 70%-a,	a kékek 90%-a	fából készült (a többi vasból).

1. Segítség a teljes valószínűség formulájának megemésztéséhez: Könnyű kiszámolni, hogy az összes golyó hányad része készült fából:

$$0.5 * 0.4 + 0.3 * 0.7 + 0.2 * 0.9 = 0.59$$

2. Segítség a Bayes formula megemésztéséhez: Azt is könnyű látni, hogy a fából készül golyóknak

- hányad része piros:
$$\frac{0.5 * 0.4}{0.59} = \frac{0.5 * 0.4}{0.5 * 0.4 + 0.3 * 0.7 + 0.2 * 0.9} = 0.34$$
- hányad része zöld:
$$\frac{0.3 * 0.7}{0.59} = \frac{0.3 * 0.7}{0.5 * 0.4 + 0.3 * 0.7 + 0.2 * 0.9} = 0.36$$
- hányad része kék:
$$\frac{0.2 * 0.9}{0.59} = \frac{0.2 * 0.9}{0.5 * 0.4 + 0.3 * 0.7 + 0.2 * 0.9} = 0.31$$

Feladat: Dobókocka, dobozok, színes golyók. Van három dobozunk. Az elsőben egy piros és egy fehér golyó van, a másodikban két piros és egy fehér, a harmadikban egy piros és három fehér. A véletlenre bízzuk, hogy melyik dobozból húzunk egy golyót. Ha a dobókockánkkal 1-est, 2-est vagy 3-ast dobunk, akkor a első dobozból, ha 4-est vagy 5-öst, akkor másodikból, ha 6-ost, akkor a harmadikból. Kérdés: mi a valószínűsége annak, hogy a váletlenszerűen választott dobozból kihúzott golyó piros?

Megoldás: Az alábbi valószínűségek és feltételes valószínűségek nyilvánvalóak:

$$\text{P(első doboz)} = \frac{3}{6} \qquad \text{P(második doboz)} = \frac{2}{6} \qquad \text{P(harmadik doboz)} = \frac{1}{6}$$

$$\text{P(piros | első doboz)} = \frac{1}{2} \quad \text{P(piros | második doboz)} = \frac{2}{3} \quad \text{P(piros | harmadik doboz)} = \frac{1}{4}$$

A teljes valószínűség formuláját alkalmazva:

$$\begin{aligned} &\text{P(piros)} = \\ &= \text{P(első doboz)} \cdot \text{P(piros | első doboz)} + \\ &+ \text{P(második doboz)} \cdot \text{P(piros | második doboz)} + \\ &+ \text{P(harmadik doboz)} \cdot \text{P(piros | harmadik doboz)} = \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = 0.514 \end{aligned}$$

Megjegyzés: A képletekkel leírt gondolatmenetet le is lehet rajzolni egy valószínűségekkel súlyozott fa-gráf segítségével. Olvasás közben tessék a rajzolni!

A fa gyökeréből kiindul három ág.

- Az első ág annak felel meg, hogy a dobókockával 1-est, 2-est vagy 3-ast dobunk, azaz az első dobozhoz jutunk.
- A második ág annak felel meg, hogy a dobókockával 4-est vagy 5-öst dobunk, azaz a második dobozhoz jutunk.
- A harmadik ág annak felel meg, hogy a dobókockával 6-ost dobunk, azaz a harmadik dobozhoz jutunk.

Az egyes ágakhoz súlyok tartoznak.

- Az első doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{3}{6}$.
- A második doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{2}{6}$.
- A harmadik doboznak megfelelő ágon a súly $\frac{1}{6}$.

Mindegyik ág kétfelé ágazik. Mindegyik elágazásnál az első ág a piros, a második ág a fehér húzásának felel meg.

- Az első doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{2}$.
- A második doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{2}{3}$ illetve $\frac{1}{3}$.
- A harmadik doboznak megfelelő ág folytatásainál a súlyok: $\frac{1}{4}$ illetve $\frac{3}{4}$.

5.6. *** Optimális taktika előre nem látható helyzetekben

Számtalanszor fordul elő az életünkben, hogy előre nem látható helyzetekben kell döntenünk. Például amikor használt autót akarunk venni (természetesen jót és olcsót!), és meglehetősen tapasztalatlanul kezdjük nézegetni a kínálatot, akkor egy idegig csak nézegetünk, "szimatolgatunk", aztán egyszercsak ráakadunk egy olyan vételi lehetőségre, ami jobbnak tűnik, mint az összes korábbi, és akkor erre gyorsan lecsapunk, és megvesszük.

Egy ilyen probléma természtesen nagyon összetett lehet: a véletlen jelentős szerepet játszhat benne, és pszichológiai és sok egyéb tényező is beleszólhat a problémába. Mégis, egy egyszerű valószínűségszámítási modell segítségével meglepően érdekes és szép eredményre juthatunk. Ezzel a modellel foglalkozunk ebben a részben. Előkészítésként vesszük az alábbi problámát:

Tekintsünk 10 cédulát, 1-től 10-ig számozva őket. A 10-es cédulát, a legnagyobb számot nevezzük: *királynő*nek. Rakjuk le a cédulákat balról jobbra egymás mellé véletlenszerűen, azaz tekintsünk egy véletlenszerű permutációt. Például egy lehetséges permutáció:

$$6,\ 5,\ 7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 2,\ 10,\ 9,\ 3$$

A királynő, ebben a permutációban a 8-ik pozícióra került. Keressük meg most a királynő előtti legnagyobb számot! Ez most a 8-as, ami a 6-ik pozíción áll. A királynő előtti legnagyobb számot *szolgáló lány*nak nevezzük. Tehát most a szolgáló lány a 8-as, és ő a 6-ik pozíción áll. Jelöljük X-szel a királynő pozícióját, Y-nal a szolgáló lány pozícióját. A fenti példában tehát $X = 8, Y = 6$. Ha $X = 1$, azaz a királynő az 1-ső pozíción áll, akkor nincs szolgálólány, ilyenkor Y értékét 0-nak vesszük.

Segédfeladat: Rögzítsünk egy c számot, mely eleget tesz az $1 \le c \le 9$ egyenlőtlenségeknek. Kiszámoljuk a

$$\mathrm{P}(\ X > c \quad \text{és} \quad Y \le c\ )$$

valószínűséget, vagyis annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a királynő pozíciója nagyobb c-nél, és a szolgálólány pozíciója kisebb vagy egyenlő c-nél. Ez a valószínűség – természetesen – függ c-től, ezért a valószínűséget c-vel kifejezve adjuk meg.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\ \ X > c \quad \text{és} \quad Y \le c\ \ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \mathrm{P}(\ \ X = k \quad \text{és} \quad Y \le c\ \ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \mathrm{P}(\ \ X = k\ \ )\ \mathrm{P}(\ \ Y \le c \ \mid\ X = k\ \ ) \\
&= \sum_{k=c+1}^{10} \frac{1}{10}\ \frac{c}{k-1} \\
&= \frac{1}{10} \ \sum_{k=c+1}^{10} \frac{c}{k-1}
\end{aligned}$$

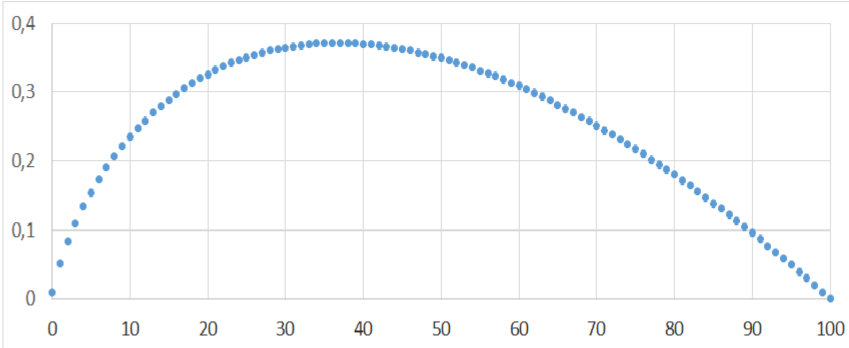
Megjegyzés: 10 cédula helyett vegyünk most 100 cédulát, megszámozva őket 1-től 100-ig. Most a 100-as cédulát hívjuk királynőnek. Ha lerakjuk a 100 cédulát balról jobbra egymás mellé véletlenszerűen, azaz tekintünk egy véletlenszerű permutációt, akkor a királynő előtti számok között a legnagyobbat hívjuk szolgálólánynak. Jelöljük X-szel a királynő pozícióját, Y-nal a szolgáló lány pozícióját. Ha $X = 1$, azaz a királynő az 1-ső pozíción áll, akkor nincs szolgálólány, ilyenkor Y értékét 0-nak vesszük. Válasszunk most is egy c számot, mely eleget tesz az $1 \le c \le 99$ egyenlőtlenségeknek.

100 cédula esetén is kiszámoljuk a a hasonlóképpen értelmezett

$$\mathrm{P}(\ X > c \quad \text{és} \quad Y \le c\ )$$

valószínűséget. Az eredmény kézenfekvő::

$$\mathrm{P}(\ \ X > c \quad \text{és} \quad Y \le c\ \ ) = \frac{1}{100} \ \sum_{k=c+1}^{100} \frac{c}{k-1}$$



1. ábra. *A kiszámított valószínűség c függvényében*

Ez a képlet fontos lesz a következő példa megoldásában, ezért minden 0 és 100 közötti c-re kiszámoltuk Excellel, és a numerikus eredményeket táblázatba foglatuk. A táblázat alapján grafikont is készítettünk, ezt láthatjuk "A kiszámított valószínűség c függvényében" című ábrán. Magát a táblázatot – a hellyel való spórolás miatt – csak rövidítve adjuk meg. A táblázatnak csupán az elejét, a közepének egy részét és a végét mutatjuk:

c	$\frac{1}{100} \sum_{k=c+1}^{100} \frac{c}{k-1}$
0	0.010
1	0.052
2	0.084
3	0.110
4	0.134
5	0.155
$\vdots$	$\vdots$
35	0.37071
36	0.37101
37	0.37104
38	0.37080
39	0.37030
40	0.36953
$\vdots$	$\vdots$
95	0.049
96	0.039
97	0.030
98	0.020
99	0.010
100	0.000

Az ábráról és a táblázatból látjuk, hogy a maximális valószínűség $c = 37$-nél adódik, és hogy a maximális valószínűség értéke hat tizedesre kerekítve 0.371043, két tizedesre kerekítve 0.37. Ezt a tényt használni fogjuk a következő – világhírnek örvendő – feladatban.

Feladat: Szindbad és a háremhölgyek. Egyszer a török szultán – jutalomképpen – felajánlotta Szindbádnak, a híres nőcsábásznak, hogy 100 gyönyörű hármehölgye közül választhat egyet, és a kiválsztott hölggyel eltölhet egy éjszakát.

Szindbád soha nem látta korábban a hölgyeket, és most is csak nagyon korlátozott körülmények között találkozhat velük: a hölgyek egyesével jelennek meg Szindbád előtt véletlenszerű sorrendben. Minden lehetséges sorrend ugyanakkora valószínűségű – ezt a tényt Szindbádnak elpőre megmondták. Szindbád csak egyszer mondhatja az előtte éppen mutatkozó hölgyre, hogy "őt választom". Akit Szindbád nem választ ki a megjelenésekor, azt már később "visszamenőleg" nem kérheti. Választását később nem módosíthaja.

A háremhölgyek között létezik egy jól definiált – mindenki számára nyilvánvaló – szépség sorrend: van közöttük egy legszebb, egy második legszebb, és így tovább egy 100-ik legszebb. Bármely két hölgy esetében egyértelmű, hogy melyikük a szebb. Szindbád, aki – ismételjük – nem ismeri a hölgyeket, és most is csak a megjelenésükkor látja őket, arra törekszik, hogy elcsípje a legszebbet. Ha a procedúra végén kiderül, hogy ez sikerült neki, akkor – hiúsága beteljesül, és akcióját sikeresnek könyveli el, ha nem, akkor az akció nem ért semmit a számára . (Szindbád ilyen. Úgy kell neki!)

Hogyan válasszon Szindbád? Úgy tűnhet, hogy a siker elérésének nagyon kicsi az esélye. Valóban, ha csak úgy véletlenszerűen választ egy hölgyet, mondjuk a legelsőt, vagy kisorsolja előre, hogy hányadikat, akkor 0.01 az esélye annak, hogy a legszebb jut neki.

Ha viszont okosan taktikázik, akkor a bölcsesség meglepően nagy valószínűséggel sikerre viheti az akcióját! Ez fog kiderülni az itt következő megoldásból! Ilyen bölcsességek jól jönnek minddenkinek – ezért nézzük máris a megoldást!

Megoldás: Szindbad így gondolkodhat: Képzeletben választ egy c számot $(0 \leq c \leq 99)$, és előre eldöni magában, hogy az első c hölgy közül semmiképpen sem választ, csak megfigyeli őket, és megjegyzi, milyen szép volt közülük a legszebb. Aztán a $(c+1)$-iknek megjelenő hölgytől kezdve már csak arra figyel, hogy felbukkan-e olyan hölgy, akinek szépsége meghaladja az első c hölgy során kifigyelt maximumális szépséget. Ha felbukkan ilyen hölgy, akkor arra lecsap, ha nem, akkor nem választ senkit. Nevezzük ezt a taktikát *c-taktiká*nak!

A segédfeladatunkra támaszkodva könnyű megadni, hogy ezzel a c-taktikával mi a valószínűsége annak, hogy Szindbád elcsípi a legszebb hölgyet. Felhasználva a korábban definiált királynő és szolgálólány fogalmát, és a velük kapcsolatban bevezetett X és Y valószínűségi változókat, azt kell az Olvasónak meggondolni, hogy

az az esemény, hogy

Szindbád a c -taktikával elcsípi a legszebb hölgyet

akkor és csak akkor következik be, ha az

$X > c$ *és* $Y \leq c$

esemény bekövetkezik.

Ennek az eseménynek a valószínűségét a segédfeladathoz fűzött megjegyzésben megadtuk:

$$\frac{c}{100} \sum_{k=c+1}^{100} \frac{1}{k-1}$$

A képlettel kapcsolatban készített táblázatból és ábrából világosan kiderül, hogy ha Szindbád a $c = 37$ -es taktikát alkalmazza, akkor 0.37 valószínűséggel elcsípi a legszebb hölgyet.

A 0.37 valószínűség – bizony – nincs túl közel az áhított 1-hez, de

- lényegesen nagyobb az "ész nélküli taktika" 0.01 -es siker valószínűségénél, és
- be lehet bizonyítani, hogy nem létezik olyan taktika, ami 0.37-nél nagyobb valószínűséggel vezetne sikerre.

Be lehet látni, hogy hasonló helyzetekben is a követendő optimális taktika így fest: a lehetőségek 37 % -át csak nézegetni kell úgy, hogy közülük nem választunk, de megjegyezzük a "szépség", "jóság" maximumát, a 37 % elengedése után viszont arra kell lecsapni, amikor a "szépség", "jóság" meghaladja a korábban kifigyelt maximumot. Ezzel a taktikával 0.37 valószínűséggel elcsípjük a lehetőségek közül a "legszebbet", "legjobbat".

5.7. Feltételes eloszlás eseményre vonatkozóan

Blabla

Példa: Fiatal házaspár egy vagy több gyerekkel. Korábbi példánk szerint, ha egy fiatal házaspártházaspárt véletlenszerűen választunk, és tekintjük az

$$X = \text{ gyerekek száma}$$

valószínűségi változót, akkor a valószínűségi változó eloszlása:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Ha a véletlenszerűen választott fiatal párról tudjuk, hogy van gyerekük, de nem tudjuk, hogy hány, akkor a gyerekek számának lehetséges értékei 1, 2, 3. Ezeknek a lehetséges értékeknek a feltételes valószínűségeit táblázatba rendezve jutunk az X valószínűségi változó $X \geq 1$ feltétel melletti feltételes eloszlásához:

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{0.4}{0.8}$	$\frac{0.3}{0.8}$	$\frac{0.1}{0.8}$

azaz

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

azaz

x	1	2	3
$p(x)$	0.500	0.375	0.125

5.8. Feltételes eloszlások síkbeli eloszlás esetén

1. Példa: Hány kék, ha tudjuk, hogy hány piros? Az 1. fejezet 7. alfejezében az 5. példában feltettük, hogy egy dobozban 45 darab golyó van, melyek közül 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és megfigyeljük, hogy a kivett golyók között hány piros és hány kék van:

$$X = \text{ ahány piros van a kivettek között}$$

$$Y = \text{ ahány kék van a kivettek között}$$

Ott meghatároztuk az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását, egy táblázatot kaptunk. Gondoljuk meg ennek a példának a kapcsán, hogy hogyan lehet $(X;Y)$ eloszlásából meghatározni Y feltételes eloszlását olyan feltétel mellett, hogy X értéke adott konkrét x érték?

1. Megoldás: A feltételes eloszlások tagjai nyilván feltételes valószínűségek, melyeket hányadosként kapunk a megfelelő valószínűségekből. Az alábbi táblázat minden oszlopának minden elemét úgy kaptuk meg, hogy $(X;Y)$ eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(X = x, Y = y)$ valószínűséget elosztottuk X eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(X = x)$ tagjával:

Y feltételes eloszlásai adott X értékek mellett:

y										
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
7	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
6	0.040	0.015	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	0.145	0.085	0.037	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
4	0.281	0.231	0.160	0.084	0.026	0.000	0.000	0.000	0.000	
3	0.300	0.328	0.320	0.266	0.174	0.070	0.000	0.000	0.000	
2	0.173	0.242	0.313	0.369	0.381	0.321	0.176	0.000	0.000	
1	0.049	0.086	0.143	0.224	0.327	0.435	0.504	0.429	0.000	
0	0.005	0.012	0.024	0.048	0.093	0.174	0.319	0.571	1.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

2. Megoldás: Ha 45 darab golyó van egy dobozban, közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér, kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül, és kiderül, hogy a kivett golyók között 3 piros van, azaz teljesül az $X = 3$ feltétel, akkor eme feltétel mellett a kék golyók számánáka az eloszlása nyilván olyan, mint ha 35 darab golyó lenne a dobozban, közülük 15 darab lenne kék, 20 darab lenne fehér, és kivennénk 5 darab golyót visszatevés nélkül. Ezért a mondott feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 2 kék golyó lesz a kivettek között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y = 2$, a jól ismert képlet:

$$\frac{\binom{15}{2}\binom{20}{5-2}}{\binom{35}{5}}$$

Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy y darab kék golyó lesz a kivettek között, vagyis annak a valószínűsége, hogy $Y = y$, ugyanaz a képlet, csak a 2-es helyére y-t írunk:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{5-y}}{\binom{35}{5}}$$

Ha az $X = 3$ feltételt kicseréljük az általánosabb $X = x$ feltételre, akkor a keresett feltételes valószínűséget így adhajuk meg:

$$\frac{\binom{15}{y}\binom{20}{8-x-y}}{\binom{35}{8-x}}$$

2. Példa: Hány piros, ha tudjuk, hogy hány kék? Gondoljuk meg, hogy hogyan lehet $(X;Y)$ eloszlásából meghatározni X feltételes eloszlását olyan feltétel mellett, hogy Y értéke adott konkrét y érték.

1. Megoldás: A feltételes eloszlások tagjai nyilván feltételes valószínűségek, melyeket hányadosként kapunk a megfelelő valószínűségekből. Az alábbi táblázat minden oszlopának minden elemét úgy kaptuk meg, hogy $(X;Y)$ eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(X = x, Y = y)$ valószínűséget elosztottuk X eloszlásának táblázatából a megfelelő $\mathrm{P}(X = x)$ tagjával:

X feltételes eloszlásai adott Y értékek mellett:

y										
8	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
7	0.667	0.333	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
6	0.437	0.460	0.103	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	0.281	0.468	0.222	0.030	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
4	0.177	0.416	0.312	0.088	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	
3	0.109	0.340	0.360	0.160	0.029	0.002	0.000	0.000	0.000	
2	0.065	0.261	0.367	0.230	0.067	0.008	0.000	0.000	0.000	
1	0.038	0.190	0.343	0.286	0.118	0.024	0.002	0.000	0.000	
0	0.022	0.132	0.298	0.318	0.174	0.049	0.007	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

Az előző feladat második megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett az $X = x$ esemény feltételes valószínűsége:

$$\frac{\binom{10}{x}\binom{20}{8-y-x}}{\binom{30}{8-y}}$$

5.9. Óvakodjunk a félreérthető feladatoktól!

A valószínűségszámítás tanulása során szinte biztos, hogy a tanuló találkozik olyan feladattal, melyben a feltételek, körülmények nincsenek pontosan megadva. Ebből persze félreértések adódnak, viták támadnak, melyek során a diák ömbizalma alaposan sérülhet. Erre a negatív lehetőségre mutatunk itt egy példát.

Feladat: Ha van fiú, van-e lány is? (Ilyen címmel szerepelt már egy feladat ennek a fejezetnek az elején, az 5.1 alfejezetben. Most ennek a feladatnak egy eléggé elterjedt és népszerű, de – pontatlan megfogalmazása miatt – sok vitát kiváltó változatával foglalkozunk.) Egy véletlenszerűen választott ismeretlen kétgyerekes családhoz becsönget valaki. A sors úgy hozza, hogy fiú nyit ajtót. Mi a valószínűsége annak, hogy a testvére lány, vagyis a fiú mellett lány is van a családban?

Megoldás: Ha fiú nyit ajtót, akkor ez a tény azt jelzi, hogy a családban van fiú. A fejezet elején kiszámoltuk, hogy ilyen feltétel mellett annak a valószínűsége, hogy lány is van a családban, $2/3$-dal egyenlő:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 2/3$$

B) Megoldás: Az ajtót nyitó gyerek testvérének neme független az ajtót nyitó gyerek nemétől. Ezért annak a valószínűsége, hogy lány is van a családban, $1/2$-del egyenlő:

$$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 1/2$$

Kérdés: Melyik a jó megoldás?

Válasz: Mindkét megoldás jó lehet, ha a feladatot megfeleően pontosítjuk.

1. Ha olyan társadalomban élünk, ahol a fiúk udvariasak, és – fiú-lány testvérpár esetén – lánytesvérüket megelőzve pattannak ajtót nyitni, akkor az A) megoldás a jó:

   $$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 2/3$$

2. Ha mindig az idősebb gyerek megy ajtót nyitni, vagy ha mindig a fiatalabb, vagy ha igazságos sorsolással döntik el, hogy ki menjen ajtót nyitni, akkor a B) megoldás a jó:

   $$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 1/2$$

3. Ha pedig a társadalmi szokások miatt – fiú-lány testvérpár esetén – a lányok nyitnak ajtót, akkor nyilván a kérdéses feltételse valószínűség 0:

   $$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = 0$$

4. Kis fantáziával – ennyi fantázia a valószínűségszámítás tanulása során nélkülözhetetlen! – el lehet képzelni olyan társadalmat is, ahol fiú-lány testvérpár esetén p valószínűséggel a fiú, $(1-p)$ valószínűséggel a lány megy ajtót nyitni.

   Ez a "véletenítés" megvalósulhat például úgy, hogy

   a) p értékének megfelelően a fiú és a lány sorsot húz, és úgy is, hogy
   b) feltételezzük, hogy a trásadalomban a kétgyerekes családok p -ed részében a fiú az ajtó nyitogató, $(1-p)$ -ed részében a lány.

   Ekkor – mint mindjárt megmutatjuk – a szóbanforgó feltételes valószínűség 0 és $2/3$ között akármilyen értékű is lehet, hiszen az értékét az alábbi képlet adja meg:

   $$\text{P(van lány a családban | fiú nyit ajtót)} = \frac{2p}{1+2p}$$

   Nyilvánvaló, hogy $p=0$ esetén ez a képlet 0-t ad, $p=1$ esetén $2/3$-ot.

   A képlet levezetése:

   $$\text{P(van lány | fiú nyit ajtót)} =$$

$$= \frac{\text{P(van lány ÉS fiú nyit ajtót)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is ÉS fiú nyit ajtót)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}{\text{P(fiú nyit ajtót)}}$$

$$= \frac{\text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}{\text{P(két fiú van)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | két fiú van)} + \text{P(van lány is és fiú is)} \cdot \text{P(fiú nyit ajtót | van lány is és fiú is)}}$$

$$= \frac{0.5 \cdot p}{0.25 \cdot 1 + \ 0.5 \cdot p} = \frac{2\,p}{1\ +\ 2\,p}$$

Konklúzió: Jobb, ha a kezdőket tanító kollégák elkerülik az ilyen – nem kellően pontosan definiált – feladatokat! Természetesen az is jó – ha van rá idő és lehetőség – ha megfelelő nehézségű példákon megtanítják a diákoknak, hogy egyrészt észrevegyék, amikor egy feladatban a feltételek nincsenek pontosan megadva, másrészt érezzék, hogy mit is kell pontosítani ahhoz, a hogy a feladat korrekt legyen.

6. Függetlenség

6.1. Események függetlensége

Két esemény függetlensége: Azt mondjuk, hogy a B, $\overline{B}$ eseménypár független az A, $\overline{A}$ eseménypártól, ha az A vagy az $\overline{A}$ bekövetkezése nem módosítja a B, $\overline{B}$ eseménypár valószínűségeit, azaz

$$\text{P}(B|A) = \text{P}(B)$$

$$\text{P}(\overline{B}|A) = \text{P}(\overline{B})$$

$$\text{P}(B|\overline{A}) = \text{P}(B)$$

$$\text{P}(\overline{B}|\overline{A}) = \text{P}(\overline{B})$$

Nem nehéz megmutatni, hogy eme 4 egyenlőség közül akármelyik implikálja a többit, ezért a függetlenség definiciójául szolgálhat az egyetlen

$$\text{P}(B|A) = \text{P}(B)$$

egyenlőség is. Ha itt a baloldali feltételes valószínűséget hányadosként írjuk fel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{\text{P}(A \cap B)}{\text{P}(A)} = \text{P}(B)$$

amiből szorzással az A-ra, B-re nézve szimmetrikus

$$\text{P}(A \cap B) = \text{P}(B)\ \text{P}(A)$$

egyenlőség adódik. Tehát a függetlenség szimmetrikus reláció: ha B független A-tól, akkor A is független B-től. Ezért függetlenség esetén azt mondhatjuk, hogy az események **függetlenek egymástól**. Könnyű belátni, hogy a

$$\mathrm{P}(A \cap B) \;=\; \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B)$$

egyenlőségből következnek a

$$\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\overline{B})$$
$$\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) = \mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(B)$$
$$\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{A})\mathrm{P}(\overline{B})$$

egyenlőségek is. Ezért a függetlenség definíciójául az egyetlen

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

egyenlőség, vagy alábbi négy egyenlőség

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cap B) \;&=\; \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B) \\
\mathrm{P}(A \cap \overline{B}) \;&=\; \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(\overline{B}) \\
\mathrm{P}(\overline{A} \cap B) \;&=\; \mathrm{P}(\overline{A})\ \mathrm{P}(B) \\
\mathrm{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \;&=\; \mathrm{P}(\overline{A})\ \mathrm{P}(\overline{B})
\end{aligned}$$

is szolgálhat.

Három esemény függetlensége: Három esemény függetlenségéhez már 8 egyenlőségnek kell teljesülni:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \;&=\; \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(A_2)\ \mathrm{P}(A_3) \\
\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \;&=\; \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(A_2)\ \mathrm{P}(\overline{A_3}) \\
\mathrm{P}(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \;&=\; \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(\overline{A_2})\ \mathrm{P}(A_3) \\
\mathrm{P}(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \;&=\; \mathrm{P}(A_1)\ \mathrm{P}(\overline{A_2})\ \mathrm{P}(\overline{A_3}) \\
\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \;&=\; \mathrm{P}(\overline{A_1})\ \mathrm{P}(A_2)\ \mathrm{P}(A_3) \\
\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \;&=\; \mathrm{P}(\overline{A_1})\ \mathrm{P}(A_2)\ \mathrm{P}(\overline{A_3}) \\
\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) \;&=\; \mathrm{P}(\overline{A_1}1)\ \mathrm{P}(\overline{A_2})\ \mathrm{P}(A_3) \\
\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \;&=\; \mathrm{P}(\overline{A_1})\ \mathrm{P}(\overline{A_2})\ \mathrm{P}(\overline{A_3})
\end{aligned}$$

Több esemény függetlensége: Több, mondjuk n, esemény függetlensége esetén nem csak annak kell teljesülnie, hogy

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)\ldots\mathrm{P}(A_n),$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz kell hogy legyen az egyenlőség, például:

$$\mathrm{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(\overline{A_1})\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(\overline{A_3})\mathrm{P}(\overline{A_4})\ldots\mathrm{P}(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van.

Feladat: Több vizsgálat jobb eredményt ad. Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég többször is vizsgálták, és minden vizsgálat betegnek jelezte. A vizsgálatok számának függvényében adjuk meg, hogy mennyire jogos, hogy aggódik?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a vizsgálatok száma n. Feltételezve, hogy a vizsgálatok függetlenek egymástól, igazak az alábbiak:

$$\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják } n\text{-szer} \mid \text{beteg }) = \left(\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják egyszer} \mid \text{beteg })\right)^n$$

$$\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják } n\text{-szer} \mid \text{nem beteg }) = \left(\mathrm{P}(\text{ betegnek diagnosztikálják egyszer} \mid \text{nem beteg })\right)^n$$

Ezeket felhasználva, – barátom esélyei így festenek:

P(beteg | betegnek diagnosztikálják n-szer)

$$= \frac{\text{P(beteg és betegnek diagnosztikálják } n\text{-szer)}}{\text{P(betegnek diagnosztikálják } n\text{-szer)}}$$

$$= \frac{\text{P(beteg)}\cdot\text{P(betegnek diagnosztikálják } n\text{-szer | beteg)}}{\text{P(beteg)}\cdot\text{ P(betegnek diagnosztikálják } n\text{-szer | beteg)}+\text{P(nem beteg)}\cdot\text{ P(betegnek diagnosztikálják } n\text{-szer | nem beteg)}}$$

$$= \frac{\text{P(beteg)}\cdot(\text{ P(betegnek diagnosztikálják egyszer | beteg) })^n}{\text{P(beteg)}\cdot(\text{ P(betegnek diagnosztikálják egyszer | beteg) })^n+\text{P(nem beteg)}\cdot(\text{ P(betegnek diagnosztikálják egyszer | nem beteg) })^n}$$

$$= \frac{0.001 \cdot 0.8^n}{0.001 \cdot 0.8^n \ + \ 0.999 \cdot 0.1^n}$$

Az alábbi táblázatban n függvényében adjuk meg a vizsgált feltételes valószínűség numerikus értékét:

n	P(beteg | betegnek diagnosztikálják n-szer)
1	0.008
2	0.060
3	0.339
4	0.804
5	0.970

Láthatjuk, hogy ha a teszt 5-szöri ismétlése mind pozitív eredményt ad, akkor már nagy a gond!

Megjegyzés: Felmerülhet valakiben a kérdés, hogy mi az esélye a betegségnek, ha n tesztből k jelez betegséget, de $n-k$ nem. A kérdésre a választ a binomiális eloszlás segítségével tudjuk majd megadni.

6.2. Valószínűségi változók függetlensége

Blabla

6.3. Direktszorzat

1. Példa: Fiatal házaspár gyerekeinek száma és a nagyszülők száma függetlenek egymástól. Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettüük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{ gyerekek száma}, \quad Y = \text{ nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását. $(X;Y)$ eloszlása mellett feltüntetjük X és Y eloszlását is:

y	P$(Y=y)$					P$(X=x, Y=y)$
4	0.30	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.40	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.15	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.10	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.05	0.010	0.020	0.015	0.005	
		0.2	0.4	0.3	0.1	P$(X=x)$
		0	1	2	3	x

Vegyük észre, hogy $(X;Y)$ eloszlásának minden tagját szorzatként kaptuk meg X és Y eloszlásának megfelelő tagjaiból:

$$\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\,\mathrm{P}(Y=y)$$

Definíció: Ha egy kétdimenziós eloszlás minden tagja úgy képződik két egydimenziós eloszlás tagjaiból, hogy a megfelelő tagokat összeszorozzuk, akkor a síkbeli eloszlást a két egydimenziós eloszlás **direktszorzat**ának nevezzük.

6.4. Konvolúció

1. Példa: Gyerekek száma plusz nagyszülők száma. Korábban vizsgáltuk az a problémát, melyben egy fiatal házaspárt véletlenszerűen választottunk, és tekintettüük az alábbi két valószínűségi változót:

$$X = \text{ gyerekek száma}, \qquad Y = \text{ nagyszülők száma}$$

Az akkor mondott feltételek mellett meghatároztuk az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását:

y					
4	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.010	0.020	0.015	0.005	
	0	1	2	3	x

Az előző alpontban észrevettük, hogy $(X;Y)$ eloszlása X eloszlásából és Y eloszlásából direktszorzatként adódik:

y	$\mathrm{P}(Y=y)$					$\mathrm{P}(X=x,Y=y)$
4	0.30	0.060	0.120	0.090	0.030	
3	0.40	0.080	0.160	0.120	0.040	
2	0.15	0.030	0.060	0.045	0.015	
1	0.10	0.020	0.040	0.030	0.010	
0	0.05	0.010	0.020	0.015	0.005	
		0.2	0.4	0.3	0.1	$\mathrm{P}(X=x)$
		0	1	2	3	x

Ha – valamilyen rejtélyes okból – a gyerekek számát és a nagyszülők számát mindig összeadjuk, és érdekel minket a $V = X + Y$ valószínűségi változó eloszla, akkor nyilván igazak az alábbiak:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(V=0) = 0.010\\
&\mathrm{P}(V=1) = 0.040 = 0.020 + 0.020\\
&\mathrm{P}(V=2) = 0.085 = 0.030 + 0.040 + 0.015\\
&\mathrm{P}(V=3) = 0.175 = 0.080 + 0.060 + 0.030 + 0.005\\
&\mathrm{P}(V=4) = 0.275 = 0.060 + 0.160 + 0.045 + 0.010\\
&\mathrm{P}(V=5) = 0.255 = 0.120 + 0.120 + 0.015\\
&\mathrm{P}(V=6) = 0.130 = 0.090 + 0.040\\
&\mathrm{P}(V=7) = 0.030
\end{aligned}$$

Ha V lehetséges értékeit és a hozzájuk tapadó valószínűségeket táblázatba rendezzük, megkapjuk V eloszlását:

v	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(V = v)$	0.010	0.040	0.085	0.175	0.275	0.255	0.130	0.030

V eloszlását egy egyszerű, **konvolúció**nak nevezett művelettel kaptuk meg X és Y eloszlásából: először vettük X eloszlásának és Y eloszlásának a direktszorzatát, majd a kapott síkbeli eloszlást a $v = x + y$ transzformációval a számegyenesre képeztük.

7. Nevezetes diszkrét eloszlások

Az eloszlások táblázatai, súly- és eloszlásfüggvényeik grafikonjai a `Diszkret_eloszlasok.xls` fájlban láthatóak. Ezt a fájlt az ábrákról az előadáson mutatjuk majd be.

7.1. Egyenletes eloszlás

Mikor használjuk: Ha n szám mindegyike ugyanakkora eséllyel bukkan fel, és a valószínűségi változó, amit megfigyelünk:

$$X = \text{a felbukkanó szám}$$

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \frac{1}{n} \qquad \text{minden lehetséges } x\text{-re}$$

Példa: Ilyen valószínűségi változóhoz jutunk, amikor szabályos dobókockával dobunk, és a dobott számot tekintjük.

7.2. Hipergeometrikus eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{ha} \quad x \geq 0, \quad x \geq n - N + M, \quad x \leq n, \quad x \leq M$$

Bizonyítás:
Mikor használjuk: Ha N darab golyó van egy ládában, közülük M darab piros, a többi $N - M$ darab fehér, és visszatevés **nélkül** húzunk n-szer, akkor az

$$X = \text{ahányszor pirosat húzunk}$$

valószínűségi változó ilyen eloszlást követ.
Paraméterek jelentése:

$$N = \text{ az összes golyók száma a dobozban a dobozban a húzások megkezdése előtt}$$
$$M = \text{ a piros golyók száma a dobozban a húzások megkezdése előtt}$$
$$n = \text{ a húzások száma}$$

Példa: Ha az ötös lottón egy szelvénnyel játszom, és X jelöli a találataim számát, akkor a 2, 3, 4, illetve 5 találat valószínűsége:

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \qquad \mathrm{P}(X=3)=\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \qquad \mathrm{P}(X=4)=\frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \qquad \mathrm{P}(X=5)=\frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}$$

Excel-függvények:

$p(x) =$ `HYPGEOM.DIST(x;n;M;N;FALSE)` $=$ `HIPERGEOM.ELOSZLÁS(x;n;M;N;HAMIS)`

$F(x) =$ `HYPGEOM.DIST(x;n;M;N;TRUE)` $=$ `HIPERGEOM.ELOSZLÁS(x;n;M;N;IGAZ)`

1. Példa: Hány szarvas él az erdőben? Egy erdőben ismeretlen számú szarvas él. A számuk becslése céljából 60 szarvast piros festékkel megjelölünk, majd néhány hét eltelte után megszámoljuk, hogy 40 véletlenszerűen választott szarvast között hány megjelöltre bukkanunk. Tegyük fel, hogy 15-re. Mit mondhatunk ezek alapján a szarvasok ismeretlen N számáról?

Megoldás: Átfogalmazzuk a feladatot erdőben szabadon élő szarvasok helyett dobozba zárt golyókra. Igaz, így kevésbé izgalmas a probléma, de könnyebben elképzelhető.

2. Példa: Hány golyó van a dobozban? Egy dobozban ismeretlen számú fehér golyó van, melyek közül 60-at pirosra festünk, majd jól összekeverjük a golyókat, és 40-szer húzunk visszatevés nélkül. Tegyük fel, hogy a kihúzott golyók között 15 piros akad. Mit mondhatunk ezek alapján a golyók ismeretlen N számáról?

1. Megoldás: Az összes golyók között a pirosak aránya $60 : N$. A kihúzott golyók között a pirosak aránya $15 : 40$. Feltételezve, hogy ez a két arány körülbelül egyenlő, a

$$60 : N \;\approx\; 15 : 40$$

közelítő egyenletet kapjuk, amiből az jön ki, hogy

$$N \;\approx\; 600 * \frac{40}{15} \;=\; 160$$

2. Megoldás: Ha X-szel jelöljük azt a valószínűségi változót, hogy hányszor húzunk piros golyót, akkor X hipergeometrikus eloszlást követ N, 60, 40 paraméterekkel. Az ismeretlen N paraméter néhány értéke mellett kiszámoltuk a P(15 piros) valószínűséget, és az értékeket táblázatba foglaltuk:

N	P(15 piros)
100	0.00
120	0.02
140	0.11
160	0.15
180	0.12
200	0.08
220	0.04
240	0.02
260	0.01
280	0.01
300	0.00

Vegyük észre, hogy $N = 160$ esetén a valószínűség értéke 0.15, de $N \leq 100$ vagy $N \geq 300$ esetén a valószínűség értéke 0.005-nél is kisebb. Ezért arra tippelhetünk, hogy a golyók (szarvasok) száma 160 körül van. A táblázatban szereplő valószínűségekből arra következtethetünk, hogy a golyók (szarvasok) száma 100 és 300 között van.

Megjegyzés: A félreértések elkerülése végett felhívjuk a figyelmet, hogy a megoldásban használt táblázat – bár valószínűségeket tartalmaz – nem egy eloszlás táblázata. A valószínűségek nem egy valószínűségi változó összes lehetséges értékéhez vannak hozzárendelve. A táblázat a valószínűségeket egy paraméter (a golyók száma) függvényében mutatja.

7.3. Binomiális eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Bizonyítás:
Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Egy p valószínűségű eseményre n kísérletet végzünk. Az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahányszor bekövetkezik az esemény az } n \text{ kísérlet során}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$n = \text{ a kísérletek száma}$$

   $$p = \text{ az esemény valószínűsége}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** n darab független, külön-külön p valószínűségű esemény kapcsán az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahány esemény bekövetkezik az } n \text{ esemény közül}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$n = \text{ az események száma}$$

   $$p = \text{ az események közös valószínűség értéke}$$

3. **Golyók húzása dobozból:** Ha N darab golyó van egy ládában, közülük M darab piros, a többi $N - M$ darab fehér, és n-szer húzunk **visszatevéssel**, akkor az valószínűségi változó ilyen eloszlást követ:

   $$X = \text{ahányszor pirosat húzunk}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$n = \text{ a húzások száma}$$

   $$p = M/N = \text{ piros húzásának valószínűsége minden egyes húzásnál}$$

Példa: Ha dobókockával 20-szor dobok, és a dobott hatosok számát X jelöli, akkor a pontosan 3 hatos valószínűsége:

$$\mathrm{P}(X = 3) = \binom{20}{3} (1/6)^3 (5/6)^{17}$$

Megjegyzés: A binomiális eloszlást a **visszatevéses**, a hipergeometrikus eloszlást a **visszatevés nélküli** húzások esetén kell használni.
Excel-függvények:

$$p(x) = \texttt{BINOM.DIST(x;n;p;FALSE)} = \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(x;n;p;HAMIS)}$$

$$F(x) = \texttt{BINOM.DIST(x;n;p;TRUE)} = \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(x;n;p;IGAZ)}$$

Megjegyzés: Egyes Excel verziókban az eloszlások nevében a . (pont) elhagyható, – például –

`BINOM.DIST` helyett `BINOMDIST`

írható.

*** **Megjegyzés: Hipergeometrikus eloszlás ≈ binomiális eloszlás** Kis ügyeskedéssel be lehet látni, hogy akármilyen x pozitív egész szám esetén az

$$M \to \infty\,, \quad M \to \infty\,, \quad M/N \to p$$

feltételek mellett

$$\lim \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Ez azt jelenti, hogy ha x-hez képest M is és N is nagy, és az M/N arány közelítőleg p, akkor a hipergeometrikus eloszlás x-ik tagja közelítőleg egyenlő a binomiális eloszlás x-ik tagjával:

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Az egzakt levezetést az "ügyeskedésekkel" az Olvasóra bízzuk. Cserébe egy heurisztikus magyarázatot adunk színes golyók segítségével:

Tegyünk N golyót egy dobozba úgy, hogy közülül M piros, a többi fehér. Húzzunk a dobozból n-szer visszatevés nélkül. Annak a esélye, hogy pontosan x-szer húzunk pirosat – mint tudjuk – a hipergeometrikus eloszlás képlete szerint

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Most tegyünk N golyót egy másik dobozba ugyanúgy, mint az előbb, de most visszatevéssel húzzunk a dobozból n-szer. Annak a esélye, hogy pontosan x-szer húzunk pirosat – mint tudjuk – a binomiális eloszlás képlete szerint

$$\binom{n}{x} \left(\frac{M}{N}\right)^x \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x}$$

Ha x-hez képest M is és N is nagy, akkor a kihúzott piros golyók számára nézve nincs sok hatása annak, hogy visszatevés nélkül vagy visszatevéssel húzúnk, ezért az x darab piros golyó esélye így is úgy is kb ugyanannyi:

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x} \left(\frac{M}{N}\right)^x \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x}$$

Mivel feltettük, hogy az M/N arány közelítőleg p, a jobboldali kifejezést kicserélhetjük így:

$$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Ezek után talán kedve támad az Olvasónak, hogy az egzakt levezetést "kiügyeskedje". Hajrá!

1. Feladat: Vajon, mindenki le tud ülni? 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 250 db szék van. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elmegy órára, mind le tud ülni egy-egy székre?

Megoldás: Először vegyük észre, hogy az órát látogató diákok X száma valószínűségi változó, mely – a diákok habitusa miatt – binomiális eloszlást követ $n = 400$ és $p = 0.6$ paraméterekkel. Az az esemény, hogy hogy mindenkinek, aki elmegy órára, jut szék, azt jelenti, hogy $X \le 250$. Ennek az eseménynek a $\mathrm{P}(X \le 250)$ valószínűségét az eloszlásfüggvénynek a 250 helyen felvett értéke adja meg, ami Excellel így számolható:

$$F(250) = \texttt{BINOM.DIST(250 ; 400 ; 0.6 ; TRUE)} =$$

$$= \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(250 ; 400 ; 0.6 ; IGAZ)} = 0.86$$

Tehát 0.86 valószínűséggel csak 250 vagy kevesebb hallgató meg órára, ezért 250 széken remekül elférnek. 0.14 valószínűséggel 250-nél több hallgató megy órára, ezért ilyenkor lesz, aki nem tud székre ülni.

2. Feladat: Biztos, hogy mindenki le tud ülni? Hány szék kell ahhoz, hogy biztosan (1 valószínűséggel, 100% biztonsággal) jusson szék mindenkinek, aki elmegy órára?

Megoldás: Ahhoz, hogy biztosan jusson szék mindenkinek, aki elmegy órára, nyilván 400 vagy több székre van szükség.

3. Feladat: Spóroljunk a székekkel! Hány szék kell ahhoz, hogy legalább 0.99 legyen a valószínűsége annak (99% legyen a biztonsága annak), hogy aki elmegy órára, mind le tud ülni egy-egy székre?

Megoldás: Ahhoz, hogy legalább 0.99 legyen a valószínűsége annak, hogy mindenkinek, aki elmegy órára, jusson szék, az kell, hogy a székek x száma eleget tegyen az alábbi egyenlőtlenségnek:

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) \ge 0.99$$

Ezért a

$$\texttt{BINOM.DIST(x ; 400 ; 0.6 ; TRUE)} =$$
$$= \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(x ; 400 ; 0.6 ; IGAZ)}$$

függvényre készítettünk egy táblázatot:

x	$F(x)$
260	0.9824
261	0.9864
262	0.9897
263	0.9922
264	0.9942
265	0.9957
266	0.9968
267	0.9977
268	0.9984
269	0.9988
270	0.9992

amiből kiolvashatuk, hogy x értéke, vagyis a székek száma legalább 263, akkor $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) \geq 0.99$.

1. Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha a 100% biztonság helyett megelégszünk 99% biztonsággal, akkor a székeknek több mint 1/3 -át megspórolhatjuk! Ha valaki a 99% biztonsággal még nem elégedett, akkor tegyen be a 263 székhez még 7-et, és a biztonság – a táblázat utolsó sora szeribnt – megnő 99.9%-re.

2. Megjegyzés: Ilyen jellegű feladatok adódnak, amikor valamilyen rendszer, például egy telefonközpont, kapacitását kell megtervezni úgy, hogy a rendszer nagy valószínűséggel el tudja látni a véletlenszerűen felmerülő igényeket.

4. Feladat: A gubanc valószínűsége. Tegyük fel, hogy egy repülőgépen 200 ülés van az utasok számára, de – bízván abban, hogy néhány utas betegség, forgalmi dugó, stb. miatt lemarad a járatról – az extra profit reményében 203 jegyet adnak el. Feltéve, hogy minden utas a többitől függetlenül 0.05 valószínűséggel marad le a járatról, számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a beszálláskor "gubanc támad", mert 200-nál több utas jelenik meg?

Megoldás: A járathoz időben odaérkező utasok száma nyilván binomiális eloszlást követ $n = 203$ és $p = 0.95$ paraméterekkel. Ezért annak a valószínűsége, hogy 200-nál több utas jelenik meg a beszálláskor, vagyis előáll a "gubeanc", egyenlő

$$1 - \texttt{BINOM.DIST(200 ; 203 ; 0.95 ; TRUE)} =$$
$$= 1 - \texttt{BINOM.ELOSZLÁS(200 ; 203 ; 0.5 ; IGAZ)} = 0.0021$$

5. Feladat: Hány extra repülőjegyet adjunk el? Az előző feladatban kapott valószínűség értéke elég kicsi ahhoz, hogy a repülőtársaság felvállalja a gubanc következményeit. Nézzük meg, hogyan függ a gubanc valószínűsége az eladott extra jegyek számától! Gondoljuk meg, hogy a p paraméter függvényében hány extra jegyet adjon el a társaság, ha nem szeretne túl gyakran gubanc-ot!

Megoldás: Excelben egyszerűen megszerkeszthető egy olyan táblázat, ami a gubanc valószínűségét mutatja p és az extra jegyek számának függvényében:

P(gubanc)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	p
1	0.1326	0.0172	0.0022	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
2	0.3992	0.0865	0.0154	0.0025	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
3	0.6685	0.2265	0.0555	0.0113	0.0021	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	
4	0.8507	0.4159	0.1368	0.0354	0.0078	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	
5	0.9437	0.6091	0.2613	0.0844	0.0224	0.0051	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	
6	0.9818	0.7675	0.4144	0.1647	0.0522	0.0140	0.0033	0.0007	0.0001	0.0000	
7	0.9948	0.8763	0.5721	0.2751	0.1036	0.0323	0.0086	0.0021	0.0004	0.0001	
8	0.9987	0.9407	0.7120	0.4056	0.1794	0.0647	0.0198	0.0053	0.0013	0.0003	
9	0.9997	0.9741	0.8211	0.5414	0.2781	0.1152	0.0400	0.0120	0.0032	0.0008	
10	0.9999	0.9897	0.8971	0.6675	0.3926	0.1856	0.0728	0.0244	0.0072	0.0019	
extra jegyek száma											

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy ha a gubanc valószínűségét 0.005 alatt akarjuk tartani, akkor

$$\begin{array}{lll} p = 0.01 & \text{esetén} & 0 \\ p = 0.02 & \text{esetén} & 0 \\ p = 0.03 & \text{esetén} & 1 \\ p = 0.04 & \text{esetén} & 2 \\ p = 0.05 & \text{esetén} & 3 \\ p = 0.06 & \text{esetén} & 4 \\ p = 0.07 & \text{esetén} & 6 \\ p = 0.08 & \text{esetén} & 7 \\ p = 0.09 & \text{esetén} & 9 \\ p = 0.10 & \text{esetén} & 10 \end{array}$$

darab extra jegy adható el.

Feladat: Amikor a tesztek különböző eredményeket adnak! Tegyük fel, hogy egy bizonyos ritka betegségben az embereknek csupán 1 ezreléke szenved. A betegséget egy olyan vizsgálattal lehet kimutatni, ami sajnos mindkét irányban tévedhet: beteg emberek esetén csak 0.8 a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat jelzi a betegséget, egészséges emberek esetében pedig csak 0.9 a valószínűsége annak, hogy az egészséges embert egészségesnek jelzi. Barátomat nemrég n-szer is vizsgálták, és k vizsgálat betegnek jelezte, $n-k$ pedig nem. Mi a valószínűsége annak, hogy barátom betegz?

Megoldás: Feltételezve, hogy a vizsgálatok függetlenek egymástól, igazak az alábbiak:

$$\text{P(betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor | beteg } = \binom{n}{x} 0.8^x (1-0.8)^{n-x} = \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.8 ; FALSE)}$$

$$\text{P(betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor | nem beteg } = \binom{n}{x} 0.1^x (1-0.1)^{n-x} = \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.1 ; FALSE)}$$

Ezeket felhasználva – barátom esélyei így festenek:

$$\text{P(beteg } | \text{ betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor) } =$$

$$= \frac{\text{P(beteg és betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor)}}{\text{P(betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor)}}$$

$$= \frac{\text{P(beteg)} \cdot \text{P(betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor | beteg)}}{\text{P(beteg)} \cdot \text{P(betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor | beteg)} + \text{P(nem beteg)} \cdot \text{P(betegnek diagnosztikálják } k\text{-szor | nem beteg)}}$$

$$= \frac{0.001 \cdot \binom{n}{x} 0.8^x (1-0.8)^{n-x}}{0.001 \cdot \binom{n}{x} 0.8^x (1-0.8)^{n-x} + 0.999 \cdot \binom{n}{x} 0.1^x (1-0.1)^{n-x}} =$$

$$= \frac{0.001 \cdot \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.8 ; FALSE)}}{0.001 \cdot \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.8 ; FALSE)} + 0.999 \cdot \text{BINOM.DIST(k ; n ; 0.1 ; FALSE)}}$$

Az alábbi táblázat a P(beteg | betegnek diagnosztikálják k-szor) feltételes valószínűség numerikus értékeit tartalmazza a $0 < k \le n \le 5$ esetekre:

	5	4	3	2	1	k
1					0.008	
2				0.060	0.002	
3			0.339	0.014	0.000	
4		0.804	0.102	0.003	0.000	
5	0.970	0.477	0.025	0.001	0.000	
n						

Ez a másik a táblázat pedig az $n = 10$ és $k = 9, 8, 7, 6, 5, 4$ esetekről szól:

	9	8	7	6	5	4	k
$n = 10$	1.000	0.999	0.958	0.390	0.017	0.000	

Érdemes elgondolkodni a numerikus értékek jelentésén!

7.4. Bernoulli féle indikátor eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \begin{cases} p & \text{ha} \quad x = 1 \\ 1-p & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mikor használjuk: Egy eseménnyel kapcsolatban bizonyos gondolatmenetkben hasznos, ha az esemény bekövetkezését egy kétértékű valószínűségi változóval kódoljuk: az 1 az esemény bekövetkezését, a 0 az esemény be nem következését jelenti:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{ha az esemény bekövetkezik} \\ 0 & \text{ha az esemény nem következik be} \end{cases}$$

Ezt a valószínűségi változót az esemény **indikátorá**nak nevezzük. Ha például több eseménnyel kapcsolatban azt nézzük, hogy közülük hány következik be, akkor ez a valószínűségi változó az egyes események indikátorainak az összege. A binomiális eloszlással kapcsolatos számításoknál hasznos, hogy indikátorok összegeként binomiális eloszlású valószínűségi változót tudunk előállítani.
Paraméter jelentése:

$$p = \text{az esemény valószínűsége}$$

7.5. Binomiális eloszlás számsorozaton

Ha az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat egy számtani sorozatot alkot, akkor

$$p(a_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

képlettel definiált eloszlás neve: **binomiális eloszlás a** $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ **halmazon**.

Nyilvánvaló, hogy ha egy eseménnyel kapcsolatban n kísérletet végzünk, akkor az esemény relatív gyakorisága binomiális eloszlást követ a

$$\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n} \ldots, \frac{n}{n}\}$$

halmazon.

7.6. Poisson eloszlás

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Mikor használjuk: Sok független, külön-külön kis valószínűségű esemény kapcsán az alábbi valószínűségi változó ilyen eloszlást követ:

$$X = \text{ahány esemény bekövetkezik}$$

Paraméter jelentése:

$$\lambda = \text{ ahány esemény } \textit{általában, átlagosan} \text{ bekövetkezik}$$

azaz

$$\lambda = \text{ az eloszlás várható értéke (ezt a fogalmat a következő fejezetben tanuljuk)}$$

azaz

$$\lambda = \text{ az események valószínűségeinek összege}$$

Megjegyzés: Ha az események az események száma n, és az események egyforma valószínűségűek, és ez a közös érték p, akkor

$$\lambda = np$$

Excel-függvények:

$$p(x) = \texttt{POISSON(x;}\lambda\texttt{;FALSE)} = \texttt{POISSON(x;}\lambda\texttt{;HAMIS)}$$

$$F(x) = \texttt{POISSON(x;n;p;TRUE)} = \texttt{POISSON(x;n;p;IGAZ)}$$

Megjegyzés: Be lehet látni, hogy ha λ egy fix pozitív szám, akkor akármilyen x pozitív egész szám esetén az

$$n \to \infty\,, \qquad p \to 0\,, \qquad n \cdot p \to \lambda$$

feltételek mellett

$$\lim \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \;=\; \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Ez azt jelenti, hogy ha n nagy és p pici úgy, hogy szorzatuk körülbelül λ, akkor a binomiális eloszlás x-ik tagja közelítőleg egyenlő a Poisson eloszlás x-ik tagjával:

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \;\approx\; \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Igazából ennek a ténynek a birtokában mondhatjuk azt, amit fentebb mondjunk: sok független, külön-külön kis valószínűségű esemény kapcsán az

$$X = \text{ahány esemény bekövetkezik}$$

valószínűségi változó eloszlását binomiális eloszlás helyett vehetjük Poisson eloszlásnak.

1. feladat: Hány hal lesz az öreg halász hálójában? Történt egyszer, hogy egy nagy tó partján álldogálva nézegettem, ahogy a sok apró halacska egymással és az öreg, alig-alig látó halásszal mit sem törődve össze-vissza úszkált. A halász éppen a hálóját készült kiemelni, amikor kedvesen így szólt hozzám: "Fiatalember! Ha eltalálod, hogy hány hal lesz a hálóban, meghívlak vacsorára". Éhes voltam, és szeretem e sült halat, és csak annyit kérdeztem tőle, hogy milyen gyakran üres a háló. Ő erre azt felelte:

"Sok éves tapasztalatom szerint mondhatom neked, hogy az eseteknek a 6 % -ában üres a háló!"

Kicsit gondolkodtam, számolgattam, és 2 halra tippeltem. Hogyan gondolkodtam, miért éppen 2 halra tippeltem?

Megoldás: Nyilván azt kellett kigondolnom, hogy a hálóban hány hal a legvalószínűbb. Így okoskodtam: A hálóban lévő halak száma – mint valószínűségi változó – Poisson eloszlást követ, hiszen

- a tóban *sok* a hal, és
- a sok hal mindegyike egymással mit sem törődve össze-vissza úszkál, ezért *egymástól függetlenül* kerülnek vagy nem kerülnek a hálóba, továbbá
- minden hal esetén az az esemény, hogy ő a hálóba kerül (ez az esemmény a hal számára felettébb szomorú), *kis valószínűségű*, hiszen ez a valószínűség a háló (akármilyen) méretének és a tó méretének a hányadosa, ami nyilván pici.

Mivel – sok éves tapasztalata alapján – a halász elárulta, hogy az eseteknek a 6 % -ában üres a háló, a 0 darab hal valószínűségét 0.06 -nak vettem, vagyis gondolatban felállatottam a

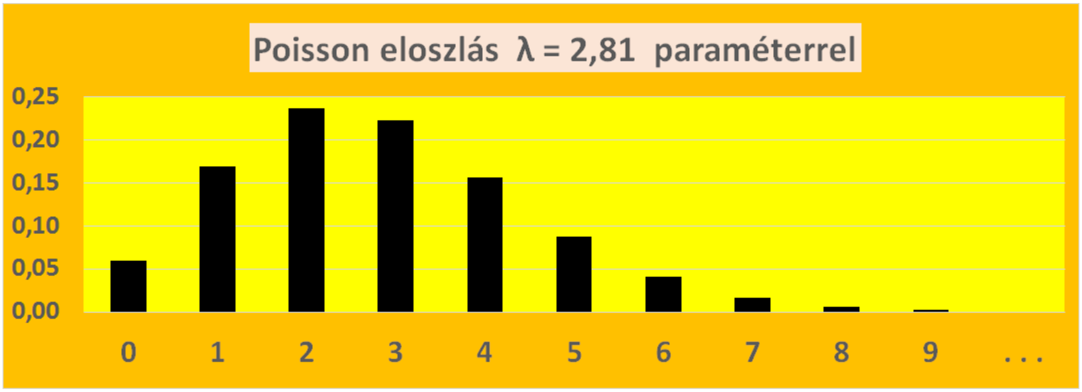
$$\frac{\lambda^0}{0!} \mathrm{e}^{-\lambda} = 0.06 \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{e}^{-\lambda} = 0.06$$

egyenletet, aminek megoldása $\lambda = -\ln(0.06) = 2.81$.

A 2.81 paraméterű Poisson eloszlás – melyet én akkor még fejből is tudtam – így fest:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$p(x)$	0.06	0.17	0.24	0.22	0.16	0.09	0.04	0.02	0.01	0.00	...

(Lásd a "Poisson eloszlás $\lambda = 2.81$ paraméterrel" című ábrát is!)



2. ábra. *Poisson eloszlás* $\lambda = 2.81$ *paraméterrel*

A táblázatból is és az ábrából is jól látható (amit a Poisson eloszlás móduszára vonatkozó ismereteinkből a táblázat és az ábra nélkül is tudunk), hogy az eloszlás módusza 2 -vel egyenlő, vagyis 2 hal a legvalószínűbb. Ezért 2 halra tippeltem – ez volt a legjobb tipp.

Természetesen a 3 hal, vagy az 1 hal, vagy a 4 hal sem rossz tipp, bár ezek a tippek kicsit kisebb valószínűséggel vezetnek sikerre. Viszont – például – a 9, 10, 11 vagy több hal valószínűségei – mint számolással ellenőrizhető – még együttesen is 0.001-nél kevesebbet tesznek ki, ezért az ilyen tippek nem kecsegtetnek a siker reményével.

2. feladat: Hány hal lesz az ifjú halász hálójában? Érdekes utána járni, hogy hogyan kellett volna gondolkodnom, ha a halász fiatal lett volna, és – sok éves tapasztalat hiányában – így felelt volna:

"A legutóbbi 100 merítés során kifigyeltem, hogy pontosan 6 -szor volt üres a háló!"

Igaz, hogy 6 osztva 100 -zal, megfelel az előző történetben mondott 6 % -nak, de mégis mást jelent. Az öreg halász által mondott 6 % -ot – mivel sok éves tapasztalatra épült – a 0 darab hal valószínűségének tekinthettük.

Viszont abból a tényből, hogy 100 merítésből 6 -szor üres a háló, nem vehetjük a 0 darab hal valószínűségét 6 % -nak. Ez megtörténhet még akkor is, ha a 0 darab hal valószínűsége eltér 0.06 -től.

Az egyes merítéseknél a 0 darab hal ismeretlen valószínűségét jelöljük p -vel. A p segítségével könnyen felírhatjuk annak valószínűségét, hogy 100 merítésből pontosan 6-szor üres a háló:

$$\text{P(100 merítésből 6 -szor üres a háló)} = \binom{100}{6} p^6 (1-p)^{100-6}$$

A jobb oldalon álló képlet p függvényeként egyszerűen vizsgálható:

p	**0.015**	0.030	0.045	**0.060**	0.075	0.090	0.105	0.120	0.135	**0.150**
$\binom{100}{6} p^6 (1-p)^{100-6}$	**0.003**	0.050	0.131	**0.166**	0.139	0.089	0.047	0.022	0.009	**0.003**

A táblázatból is kitűnik, és az analízis eszközeivel is könnyen belátható, hogy a

$$\binom{100}{6} p^6 (1-p)^{100-6}$$

kifejezés értéke

- $p < 0.060$ esetén növekszik
- $p = 0.060$ esetén a maximális érték 0.166 -dal egyenlő
- $0.060 < p$ esetén csökken

A táblázatban vastagítással jelezzük a tényt, hogy **0.015** -nél is és **0.150** -nél is a kifejezés értéke csak **0.003**. A 0.003 érték a maximális 0.166 értékhez képest elhanyagolhatóan kicsi. Ezért a p-vel jelölt ismeretlen valószínűséget 0.015 és 0.150 közöttinek feltételezzük. Leginkább a $p = 0.060$ érték tűnik jogosnak, de a 0.015 és 0.150 közötti értékeket sem zárjuk ki. A $p < 0.015$ és a $p > 0.150$ lehetőségeket viszont már elvetjük.

Ez a döntés kétségtelenül egy szubjektív döntés, melyhez hasonlókat a mindennapi életben nap mint nap megteszünk: például szívesbben ülünk egy olyan autóba, amiben van légzsák, mint egy olyanba, amelyikben nincs. A személyi sérülés valószínűsége egy esetleges balesetnél a légzsák esetén lényegesen kisebb, mintha nem lenne légzsák.

Az előző feladat megoldásában elmagyaráztuk, hogy a hálóban lévő halak száma – mint valószínűségi változó – Poisson eloszlást követ. Az eloszlás paraméterét a

$$\frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} = p \qquad \text{azaz} \qquad \mathrm{e}^{-\lambda} = p$$

egyenletből a $\lambda = -\ln(p)$ formula alapján kapjuk meg:

p	0.015	0.030	0.045	0.060	0.075	0.090	0.105	0.120	0.135	0.150
$\lambda = -\ln(p)$	**4.20**	3.51	3.10	2.81	2.59	2.41	2.25	2.12	2.00	**1.90**

E táblázatban vastagítással kiemeltük a $p = 0.015$ és a $p = 0.150$ szélső esetekhez tartozó λ értékeket:

- $p = 0.015$ esetén $\lambda =$ **4.20**
- $p = 0.150$ esetén $\lambda =$ **1.90**

Ezekhez a paraméter értékekhez tartozó Poisson eloszlások táblázatai így festenek:

Poisson eloszlás $\lambda =$ **4.20** *paraméterrel*

x	0	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	...
$p(x)$	0.015	0.063	0.132	0.185	**0.194**	0.163	0.114	0.069	0.036	0.017	...

Poisson eloszlás $\lambda =$ **1.90** *paraméterrel*

x	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$p(x)$	0.150	**0.285**	0.270	0.171	0.081	0.031	0.010	0.003	0.001	0.000	...

A táblázatokból látható (amit a Poisson eloszlás móduszára vonatkozó ismereteinkből a táblázatok nélkül is tudunk):

- $\lambda = 4.20$ (vagyis $p = 0.015$) esetén a Poisson eloszlás legvalószínűbb tagja, azaz módusza 4 -gyel egyenlő
- $\lambda = 1.90$ (vagyis $p = 0.150$) esetén a Poisson eloszlás legvalószínűbb tagja, azaz módusza 1 -gyel egyenlő

A $0.015 < p < 0.150$ valószínűségeknek megfelelő $1.90 < \lambda < 4.20$ paraméter értékek melletti Poisson eloszlások móduszai nyilván 1 és 4 közé esnek.

Ezért – összegezve a gondolatokat – ezt kapjuk: *lehetséges, hogy akár* 1 *vagy* 2 *vagy* 3 *vagy* 4 *hal a legvalószínűbb, de a* 2 *hal tűnik a legjobb tippnek*, hiszen – fentebb – láttuk, hogy a

$$\mathrm{P}(\text{ 100 merítésből 6 -szor üres a háló}) = \binom{100}{6} p^6 (1-p)^{100-6}$$

valószínűség $p = 0.060$ esetén a legnagyobb, ami $\lambda = 2.81$ -nek felel meg, és $\lambda = 2.81$ esetén a Poisson eloszlás legvalószínűbb tagja, vagyis a módusza 1 -gyel egyenlő.

Ez az eredmény összhangban van az előző feladat megoldásával, de ugyanakkor érzékelteti, hogy nem mindegy, hogy valaki a sok éves tapasztalata alapján képes egy valószínűséget megmondani, vagy csak 100 kísérlet eredménye alapján a relatív gyakorisággal közelíti azt.

3. feladat: Kullancsok a futóversenyen. A "Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

Megoldás első része

Ha azt vizsgáljuk, hogy egy kiszemelt versenyzőben, mondjuk a "Futó Botond" nevűben, hány kullancs lesz a verseny után, akkor egy valószínűségi változót kapunk. Mivel a sok kullancs mindeyike - a többitől függetlenül - kis valószínűséggel kerül ebbe a versenyzőbe, ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ valamilyen λ praméterrel. Ezért - a Poisson eloszlás képlete szerint - annak a valószínásége, hogy 1 kullancs kerül Futó Botondba, $\lambda e^{-\lambda}$. A 2 kullancs valószínásége pedig $\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$. Ha a versenyzők számát N-nel jelöljük, és a valószínűségeket relatív gyakoriságokkal helyettesítjük, akkor az alábbi egyenleteket állíthatjuk fel:

$$\frac{300}{N} = \lambda e^{-\lambda}$$

$$\frac{75}{N} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

Ezt az egyenletrendszert könnyű megoldani. Először elosztjuk a második egyenletet az elsővel. A kapott új egyenletben a baloldal törtben N-nel, a jobboliban λ-val és $e^{-\lambda}$ -val egyszerűsítve ezt kapjuk:

$$\frac{75}{300} = \frac{\lambda}{2}$$

vagyis

$$\lambda = \frac{150}{300} = 0.5$$

Ezek után az első egyenletből N -re ez jön ki:

$$N = \frac{300}{\lambda e^{-\lambda}} = \frac{300}{0.5\ e^{-0.5}} = 989.2$$

A versenyzők száma természetesen egész szám. Az hogy itt N-re nem egész jött ki, annak a következménye, hogy a kiszemelt versenyzőben az 1, illetve 2 kullancs valószínűségét relatív gyakoriságokkal közelítettük. Ezért a feladatban feltett kérdésre kézenfekvő a közelítő válasz: **Körülbelül 1000 versenyző volt a versenyen**.

Megoldás második része

Az emberben óhatatlanul felmerül a kérdés: vajon mennyire körülbelül a "körülbelül 1000"? A probléma elemzése érdekében kiszámoljuk most, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző esetén

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs

Ha mindenegyes versenyzővel kapcsolatban az 1 kullancs valószínűségét $\frac{300}{1000} = 0.3$-nak vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűségre az 1000 -ed rendű, 0.3 paraméterű binomiális eloszlás szerint Excellel a

```
BINOM.DIST( 300 ; 1000 ; 0.3 ; FALSE )
```

képlet adódik. A valószínűség numerikus értéke 0.027. Azt is kiszámolhatjuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző esetén

pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

Ha mindenegyes versenyzővel kapcsolatban a 2 kullancs valószínűségét $\frac{75}{1000} = 0.075$-nek vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűségre az 1000 -ed rendű, 0.075 paraméterű binomiális eloszlás szerint Excellel a

```
BINOM.DIST( 75 ; 1000 ; 0.075 ; FALSE )
```

képlet adódik. A valószínűség numerikus értéke 0.048. Azt is kiszámoljuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 1000 versenyző eset

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

azaz

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs, és
1000-300-75 versenyzőben lesz 0 kullancs vagy 2-nél több kullancs

Ha - úgyanúgy, mint fentebb - mindenegyes versenyzővel kapcsolatban az 1 kullancs valószínűségét $\frac{300}{1000} = 0.3$-nak, a 2 kullancs valószínűségét $\frac{75}{1000} = 0.075$-nek vesszük, és feltételezzük, hogy a versenyzőkben a kullancsok száma egymástól független, akkor a keresett valószínűség az 1000 -ed rendű, $(0.3; 0.075)$ paraméterű polinomiális eloszlással adódik:

$$\frac{(1000)!}{(300)!\,(75)!\,(1000-300-75)!}\;(0.3)^{(300)}\;(0.075)^{(75)}\;(1-0.3-0.075)^{(1000-300-75)}$$

(A polinomiális eloszlásról a `2015_osz_gyak_09_fogalmak.pdf` fájl végén lehet olvasni.) A polinomiális eloszlás nincs beépítve az Excelbe, és a polinomiális eloszlás képletében szereplő faktoriálisokat sem tudja az Excel kiszámolni. Viszont a polinomiális eloszlást kétdimenziós normális eloszlással közelíthetjük, aminek eredményeképpen a valószínűségre (hat tizedesjegyre kerekítve) 0.001269 jön ki. Azon, hogy egy nagyon kis valószínűség érték jött ki, nem szabad meglepődni: érezhetően kicsi annak esélye, hogy 1000 versenyző közül

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

Az embernek eszébe jut, hogy elvileg olyan szélsőséges helyzet is lehetne, hogy - mondjuk - csak 375 versenyző indul a versenyen, és a sors úgy hozza, hogy

300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
75 versenyzőben lesz 2 kullancs

Avagy 5000 versenyző esetén sem zárható ki, hogy

300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
75 versenyzőben lesz 2 kullancs
4625 versenyzőben pedig 0 kullancs vagy 2-nél több kullancs

Ezért elbizonytalanodunk, hogy az egyenletrendszerből adódó 989, avagy 1000, amit kerekítéssel kaptunk, vajon tényleg jó közelítése a versenyzők számának? A bizonytalanság eloszlatása céljából elemezzük most a problémát, és megnézzük, hogy különböző N és λ értékek esetén mi a valószínűsége annak, hogy

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

A valószínűségeket (melyeket `2015_osz_gyak_9_fogalmak.pdf` fájl végén látható, a polinomiális eloszlásról szóló Excel képlet segítségével számoltunk ki) táblázatba rendezve adjuk meg. Mivel a valószínűségek értéke nagyon pici, a táblázatban a valószínűségek értékeinek millószorosát (egészekre kerekítve) írtuk be:

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	λ
750	0	0	0	0	0	0	10	1	0	
800	0	0	0	0	0	35	39	0	0	
850	0	0	0	0	2	374	10	0	0	
900	0	0	0	0	96	388	2	0	0	
950	0	0	0	0	833	55	2	0	0	
1000	0	0	0	1	1 294	1	0	0	0	
1050	0	0	0	16	448	0	0	0	0	
1100	0	0	0	125	41	0	0	0	0	
1150	0	0	0	295	1	0	0	0	0	
1200	0	0	0	242	0	0	0	0	0	
1250	0	0	0	77	0	0	0	0	0	
N										

A táblázatból kitűnik, hogy - arányaikat tekintve - "kicsi" és "kicsi" között is nagy a különbség! Annak a valószínűsége, hogy

pontosan 300 versenyzőben lesz 1 kullancs, és
pontosan 75 versenyzőben lesz 2 kullancs

a táblázatban látható értékek közül 1000 versenyző esetén a legnagyobb, és már 950 vagy 1050 versenyző esetén is jóval kisebb, de 900 vagy annál kevesebb, illetve 1100 vagy annál több versenyző esetén sokkal-sokkal kisebb.

Ezért józan, elfogadható következtetésnek tűnik: körülbelül 1000 versenyző indult a versenyen, ahol a "körülbelül" azt jelenti, hogy 950-nél kevesebb vagy 1050-nál több versenyző gyakorlatilag kizárt.

7.7. Geometriai eloszlás (optimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x) = (1-p)^{x-1}p \qquad \text{ha} \quad x = 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás:
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a súlyfüggvény egy mértani sorozat, melynek első tagja p és kvóciense $q = 1 - p$.
Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - (1-p)^x \quad (x = 1, 2, \ldots)$$

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:**Ha egy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahányadik kísérletnél először következik be az esemény}$$

   Paraméter jelentése:

   $$p = \text{ az esemény valószínűsége}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén

   $$X = \text{ahányadik esemény az első olyan, ami bekövetkezik}$$

   Paraméter jelentése:

   $$p = \text{ az események közös valószínűség értéke}$$

1. Feladat: Vadászat az első nyúlig. Vadász barátom hétköznapokon (hétfőtől péntekig) a rosszabbik puskáját használja. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül csak 0.05 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Hétvégén (szombaton és vasárnap) a jobb puskájával lövöldöz. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.4 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Minden nap addig lövöldöz a nyulakra, míg sikerül egyet leterítenie.

Első kérdés: Azt mesélik, hogy egy bizonyos napon, melyről nem tudjuk, hogy a hét melyik napja volt, 7 lövést adott le a nyúlvadászaton, hogy teljesítse aznapi feladatát. Ez a bizonyos nap vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Második kérdés: Hogyan lehet következtetni a napi lövések számából arra, hogy a lövések napja vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Megoldás: Tekintsünk egy hétköznapot. A nyúl leterítéséhez szükséges lövések száma optimista geometriai eloszlást követ 0.1 paraméterrel. Ezért egy hétköznapon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\text{P(} k \text{ lövés } | \text{ hétköznap }) = 0.1\,(1-0.1)^{k-1}$$

Egy hétvégi napokon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\text{P(} k \text{ lövés } | \text{ hétköznap }) = 0.4\,(1-0.4)^{k-1}$$

Mivel a napok 5/7-e hétköznap, 2/7-e hétvégi nap, annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül,

$$\frac{5}{7} \cdot 0.1\,(1-0.1)^{k-1} + \frac{2}{7} \cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}$$

Ha egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül, akkor annak a valószínűsége, hogy ez a nap hétköznap volt:

$$\text{P(hétköznap} \mid k \text{ lövés)} = \frac{\frac{5}{7} \cdot 0.1\,(1-0.1)^{k-1}}{\frac{5}{7} \cdot 0.1\,(1-0.1)^{k-1} + \frac{2}{7} \cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}}$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy hétvégi nap volt:

$$\text{P(hétvégi nap} \mid k \text{ lövés)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}}{\frac{5}{7} \cdot 0.1\,(1-0.1)^{k-1} + \frac{2}{7} \cdot 0.4\,(1-0.4)^{k-1}}$$

Excellel könnyű kiszámolni a képletek numerikus értékét. Íme a táblázat:

k	P(hétköznap | k lövés)	P(hétvégi nap | k lövés)
1	0.24	0.76
2	0.33	0.67
3	0.44	0.56
4	0.55	0.45
5	0.66	0.34
6	0.76	0.24
7	0.83	0.17
8	0.89	0.11
9	0.93	0.07
10	0.95	0.05

Válasz az első kérdésre: A táblázatból kiolvassuk, hogy $k = 7$ esetén a hétköznap valószínűsége 0.83 , a hétvégi nap valószínűsége 0.17

Válasz a második kérdésre: A táblázat azt is mutatja, hogy $k = 1, 2, 3$ esetén a hétvégi nap a valószínűbb, más lövészszám esetén a hétköznap a valószínűbb.

7.8. Geometriai eloszlás (pesszimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x) = (1-p)^x p \qquad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Bizonyítás:
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a súlyfüggvény egy mértani sorozat, melynek első tagja p és kvóciense $q = 1-p$. Az optimista geometriai eloszláshoz képest ez az eloszlás annyiban más, hogy most a lehetséges értékek az $x = 0, 1, \ldots$ számok, míg az optimista esetben a lehetséges értékek az $x = 1, 2, \ldots$ számok. Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a pesszimista geometriai eloszlás súlyfüggvényének az ábrája úgy származtatható az optimistából, hogy a súlyfügvény grafikonját egy egységgel balra toljuk.

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Ha egy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahányszor nem következi be az esemény az első bekövetkezés előtt}$$

   Más terminológiát használva:

   $$X = \text{ahány kudarc van az első siker előtt}$$

   Paraméter jelentése:

   $$p = \text{ a siker valószínűsége}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

$$X = \text{ahány kudarcos esemény van az első sikeres előtt}$$

Paraméter jelentése:

$$p = \text{ az események közös valószínűség értéke}$$

Megjegyzés: Az "optimista", "pesszimista" jelzők használatát az indokolja, hogy az optimista esetben **sikeres** kísérletre vadászunk, a pesszimista esetben pedig **a kudarcok** számát számoljuk.

7.9. *** Kiegészítés

Az alábbi két állítás mindegyike fontos jellemzése a geometriai eloszlásoknak. Az elsőnek a bizonyítása triviális, nem is adjuk meg. A másodiknak a bizonyítása kissé nehéznek tűnhet, de igazából egyszerű és érdekes.

1. Állítás: Ha egy pozitív egész értékű, diszkrét X valószínűségi változóra teljesül, hogy az

$$\mathrm{P}(\, X = s+1 \,|\, X \,\geq\, s\,)$$

feltételes valószínűségk nem függ s-től, akkor X optimista geometriai eloszlást követ.

Bizonyítás: Triviális.

2. Állítás: Ha egy pozitív értékű, diszkrét X valószínűségi változóra teljesül, hogy az

$$\mathrm{E}(\, X \,-\, s \,|\, X \,\geq\, s\,)$$

feltételes várható érték nem függ s-től, akkor X optimista geometriai eloszlást követ.

Bizonyítás: Az $\mathrm{E}(X - s | X \geq s)$ feltételes várható értéket felírjuk összegekkel:

$$\mathrm{E}(\, X - s \,|\, X \,\geq\, s\,) \,=\, \frac{1\,p_{s+1} + 2\,p_{s+2} + 3\,p_{s+3} + \ldots}{p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \ldots}$$

Ha ez a feltételes várható érték egy c konstanssal egyenlő, akkor minden s-re, igaz, hogy

$$\frac{1\,p_{s+1} + 2\,p_{s+2} + 3\,p_{s+3} + \ldots}{p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \ldots} \,=\, c$$

A nevezővel átszorozva ez adódik:

$$1\,p_{s+1} + 2\,p_{s+2} + 3\,p_{s+3} + \ldots \;\; = \, c\,(p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \ldots)$$

Írjuk fel ezt a legutolsó egyenletet s helyett $s-1$-re is:

$$1\,p_{s} + 2\,p_{s+1} + 3\,p_{s+2} + \ldots \;\; = \, c\,(p_{s} + p_{s+1} + p_{s+2} + \ldots)$$

Az alsó egyenletből kivonva a felsőt, a következő, minden s-re fennálló egyenletet kapjuk:

$$p_s + p_{s+1} + p_{s+2} + \ldots \,=\, c\,p_s$$

Írjuk fel ugyanezt az egyenletet s helyett $s+1$-re:

$$p_{s+1} + p_{s+2} + p_{s+3} + \ldots \,=\, c\,p_{s+1}$$

Most vonjuk ki a felsőből az alsót, ezt kapjuk:

$$p_s = \, c\,\left(\, p_s - p_{s+1}\,\right)$$

ahonnan

$$c\,p_{s+1} = (c-1)\;p(s)$$

vagyis

$$p_{s+1} = \frac{c-1}{c}\,p(s)$$

ami világosan mutatja, hogy a $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sorozat egy geometriai sorozatot alkot, vagyis tényleg egy geometriai eloszlásról van szó.

Geometriai eloszlás egy számsorozat elemein: Ha az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat egy számtani sorozatot alkot, akkor

$$p(a_k) = (1-p)^{k-1}p \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

képlettel definiált eloszlás neve: **geometriai eloszlás a** $\{a_1, a_2, \ldots\}$ **halmazon**.

7.10. *** Negatív binomiális eloszlás (optimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \binom{x-1}{x-r} p^r (1-p)^{x-r} \quad \text{if } x = r, r+1, r+2, \ldots$$

Mikor használjuk:

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Ha egy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahányadik kísérletnél } r\text{-edszer következik be az esemény}$$

   Más terminlógiát használva:

   $$X = \text{ahányadik kísérletnél adódik az } r\text{-ik sikeres esemény}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$p = \text{ az esemény valószínűsége}$$
   $$= \text{ ahányadik bekövetkezésre (sikerre) vadászunk}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahányadik esemény az } r\text{-ik olyan, ami bekövetkezik}$$

   Más terminlógiát használva:

   $$X = \text{ahányadik az } r\text{-ik sikeres esemény}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$p = \text{ az események közös valószínűség értéke}$$
   $$= \text{ ahányadik bekövetkezésre (sikerre) vadászunk}$$

Excel-függvények:

$p(x) =$ `NEGBINOM.DIST(x-r;r;p;FALSE)` $=$ `NEGBIN.ELOSZLÁS(x-r;r;p;HAMIS)`

$p(x) =$ `NEGBINOM.DIST(x-r;r;p;TRUE)` $=$ `NEGBIN.ELOSZLÁS(x-r;r;p;IGAZ)`

1. Feladat: Nyúlvadászat rafináltabb módon. Vadász barátom hétköznapokon (hétfőtől péntekig) a rosszabbik puskáját használja. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.3 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Hétköznapokon addig lövöldöz a nyulakra, míg síkerül négyet leterítenie. Hétvégén (szombaton és vasárnap) az ünnepi puskájával lövöldöz. Az ünnepi puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.8 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Ünnepnapokon addig lövöldöz a nyulakra, míg síkerül hatot leterítenie.

Első kérdés: Azt mesélik, hogy egy bizonyos napon, melyről nem tudjuk, hogy a hét melyik napja volt, 7 lövést adott le a nyúlvadászaton, hogy teljesítse aznapi feladatát. Ez a bizonyos nap vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Második kérdés: Hogyan lehet következtetni a napi lövések számából arra, hogy a lövések napja vajon hétköznap volt, vagy hétvége?

Megoldás: Tekintsünk egy hétköznapot, amikor négy nyúl leterítése a feladat. Az ehhez szükséges lövések száma optimista negatív binomiális eloszlást követ 4 és 0.3 paraméterekkel. Ezért egy hétköznapon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) = \texttt{NEGBINOM.DIST(k-4 ; 4 ; 0.3 ; FALSE)}$$

Egy hétvégi napon, amikor hat nyúl leterítése a feladat, a lövések száma optimista negatív binomiális eloszlást követ 6 és 0.8 paraméterekkel. Ezért hétvégi napokon annak a valószínűsége, hogy k lövés dördül,

$$\text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ ) = \texttt{NEGBINOM.DIST(k-6 ; 6 ; 0.8 ; FALSE)}$$

Mivel a napok 5/7-e hétköznap, 2/7-e hétvégi nap, annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül,

$$\frac{5}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) + \frac{2}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )$$

Ha egy véletlenszerűen választott napon k lövés dördül, akkor annak a valószínűsége, hogy ez a nap hétköznap volt:

$$\text{P}(\ \text{hétköznap} \mid k \text{ lövés}\ ) = \frac{\frac{5}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ )}{\frac{5}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) + \frac{2}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )}$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy hétvégi nap volt:

$$\text{P}(\ \text{hétvégi nap} \mid k \text{ lövés}\ ) = \frac{\frac{2}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )}{\frac{5}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétköznap}\ ) + \frac{2}{7} \cdot \text{P}(\ k \text{ lövés} \mid \text{hétvégi napon}\ )}$$

Tekintve, hogy a képletek számlálóiban, illetve nevezőiben szereplő feltételes valószínűségek numerikus értékét – a fentebb adott képletekkel – Excelben ki lehet számolni a szóbajövő k értékekre, a keresett feltételes valószínűségekre is tudunk táblázatot készíteni:

k	P(hétköznap | k lövés)	P(hétvégi nap | k lövés)
4	1.00	0.00
5	1.00	0.00
6	0.27	0.73
7	0.31	0.69
8	0.44	0.56
9	0.62	0.38
10	0.79	0.21
11	0.90	0.10
12	0.96	0.04
13	0.99	0.01
14	0.99	0.01
15	1.00	0.00

Válasz az első kérdésre: A táblázatból kiolvassuk, hogy $k = 7$ esetén a hétköznap valószínűsége 0.31 , a hétvégi nap valószínűsége 0.69

Válasz a második kérdésre: A táblázat azt is mutatja, hogy $k = 6, 7, 8$ esetén a hétvégi nap a valószínűbb, más lövészszám esetén a hétköznap a valószínűbb.

7.11. *** Negatív binomiális eloszlás (pesszimista)

Súlyfüggvény:

$$p(x) = \binom{x+r-1}{x} p^r (1-p)^x \quad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(kombinatórikus formula)}$$

$$p(x) = \binom{-r}{x} p^r \left(-(1-p) \right)^x \quad \text{ha} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(analitikus formula)}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az optimista negatív binomiális eloszláshoz képest ez az eloszlás annyiban más, hogy most a lehetséges értékek az $x = 0, 1, \ldots$ számok, míg az optimista esetben a lehetséges értékek az $x = r, r+1, r+2, \ldots$ számok. Szemléletesen úgy fogalmazhatunk, hogy a pesszimista negatív binomiális eloszlás grafikonja ábrája az optimistából úgy származtatható, hogy a grafikont r egységgel balra toljuk. *Mikor használjuk:*

1. **Egy eseménnyel kapcsolatban:** Ha gy p valószínűségű eseményre egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahány kudarc van az } r\text{-ik siker előtt}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$p = \text{ az esemény valószínűsége}$$
   $$r = \text{ ahányadik bekövetkezésre vadászunk}$$

2. **Több eseménnyel kapcsolatban:** Végtelen sok független, külön-külön p valószínűségű esemény sorozata esetén az alábbi valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

   $$X = \text{ahány kudarcos esemény van az } r\text{-ik sikeres előtt}$$

   Paraméterek jelentése:

   $$p = \text{ az események közös valószínűség értéke}$$
   $$r = \text{ ahányadik bekövetkezésre vadászunk}$$

Excel-függvények:

$$p(x) = \texttt{NEGBINOM.DIST(x;r;p;FALSE)} = \texttt{NEGBIN.ELOSZLÁS(x;r;p;HAMIS)}$$

$$p(x) = \texttt{NEGBINOMM.DIST(x;r;p;TRUE)} = \texttt{NEGBIN.ELOSZLÁS(x;r;p;IGAZ)}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a geometriai eloszlások a negatív binomiális eloszlások speciális esetei: $r = 1$ esetén a negatív binomiális eloszlás a megfelelő geometriai eloszlást jelenti.

7.12. *** Polihipergeometrikus eloszlás

XXX

Súlyfüggvény:

$$p(x; y) =$$

Mikor használjuk:

Egy teljes eseményrendszerrel kapcsolatban: Ha .... egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi kétdimenziós valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

$$X = \text{XXX} X = \text{XXX}$$

Más terminlógiát használva:

$$X = \text{XXX} X = \text{XXX}$$

Paraméterek jelentése:

$$p_1 = \text{ az XXX valószínűsége } p_2 = \text{ az XXX valószínűsége}$$

emphExcel-függvények:
emphVetítések:

7.13. *** Polinomiális eloszlás

XXX

Súlyfüggvény:

$$p(x;y) =$$

Mikor használjuk:

Egy teljes eseményrendszerrel kapcsolatban: Ha .... egy kísérletsorozatot végzünk, akkor az alábbi kétdimenziós valószínűségi változó követ ilyen eloszlást:

$$X = \text{XXX} X = \text{XXX}$$

Más terminlógiát használva:

$$X = \text{XXX} X = \text{XXX}$$

Paraméterek jelentése:

$$p_1 = \text{ az XXX valószínűsége } p_2 = \text{ az XXX valószínűsége}$$

Excel-függvények:
Vetítések:

8. Eloszlások jellemzői

8.1. Tömegpont rendszerek

Előrebocsátunk két, a fizikából ismert képletet. Tekintsünk egy tömegpont-rendszert a számegyenesen, mely egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok pontból álló S halmazra koncentrálódik. Ha x eleme S-nek, akkor az x pontban lévő tömeg mennyiségét jelöljük $p(x)$-szel. A pontrendszer **súlypont**ja - mint ismeretes

$$\frac{\sum_x x\ p(x)}{\sum_x p(x)}$$

A kifejezésben itt - és a későbbiekben is - a szummázás az összes lehetséges x-re értendő. A

$$\sum_x (x-c)^2\ p(x)$$

érték pedig a pontrendszernek **a c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka**.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha az össztömeg 1-gyel egyenlő, azaz $\sum_x p(x) = 1$, akkor a súlypontot megadó képlet így egyszerűsödik:

$$\sum_x x\ p(x)$$

8.2. Adatrendszerek

8.2.1. Egydimenziós adatrendszerek

Adatoknak (számoknak) egy sorozatát *adatrendszer*nek hívjuk. Egy adatrendszer valamilyen értelemben vett közepét, az *átlag* fogalmát, mindenki ismeri.

1. Példa: Adatrendszer 5 elemből. A könnyebb követhetőség kedvéért az alábbi adatrendszer csak 5 elemből áll:

adatok	54	55	44	44	60

A sor végén feltüntetjük az átlagot, ami 51.4:

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	51.4

Az adatok átlagát *első momentum*nak is szokás hívni. Egy külön sorban feltüntetjük az adatok négyzeteit is és azok átlagát is:

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	51.4
adatok négyzetei	2916	3025	1936	1936	3600	2 682.6

Az adatok négyzeteinek az átlagát az adatrendszer *második momentum*ának (esetleg 0-*ra vonatkozó második momentum*ának) hívjuk. A példánkban szereplő adatrendszer második momentuma $2\,682.6$. Az összegét – például Excellel – mátrixok szorzataként is ki lehet számolni. Az alábbi mátrix szorzás, majd osztás az adatok számával (ami itt 5) a második momentumot adja:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc}54 & 55 & 44 & 44 & 60\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{c}54\\55\\44\\44\\50\end{array}} \cdot \frac{1}{5} = 2\,682.6$$

Ha a négyzetre emelés előtt egy c számot kivonunk az adatrendszer minden tagjából, akkor a c *-re vonatkozó második momentum*ot kapjuk meg. Az alábbi táblázatban $c = 50$, és az 50 -re vonatkozó második momentum 42.6:

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	
adatok és c különbségei	4	5	-6	-6	10	
különbségek négyzete	16	25	36	361	100	42.6

A $c = 50$-re vonatkozó (itt $c = 50$) második momentumot – a (0-ra vonatkozó) "síma" második momentumhoz hasonlóan – a megfelelő sor- és oszlopvektorok szorzásával, és utána a darabszámmal való osztással is megkaphatjuk:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc}4 & 5 & -6 & -6 & 10\end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{c}4\\5\\-6\\-6\\10\end{array}} \cdot \frac{1}{5} = 42.6$$

A $c = 50$-re vonatkozó második momentum arról ad felvilágosítást, hogy

- az adatrendszer vajon a c érték köré tömörül-e – ilyenkor a $c = 50$-re vonatkozó második momentum értéke kisebb , vagy
- a $c = 50$ értéktől jobban szóródik – ilyenkor a c-re vonatkozó második momentum értéke nagyobb

Speciálisan kiszámolhatjuk az adatoknak az átlagtól, itt most 51.4 -től vett különbségét is:

						átlag
adatok	54	55	44	44	60	51.4
adatok és átlag különbségei	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6	0

A kapott adatrendszert az eredeti adatrendszer *centralizált*jának hívjuk. A centralizált adatok azt mutatják, hogy az eredeti adatok hogyan helyezkednek el az átlagukhoz viszonyítva. Ha a centralizált érték pozitív, akkor az eredeti adat az átlag felett van, ha ha a centralizált érték negatív, akkor az eredeti adat az átlag alatt van. A centralizált érték nagysága padig az átlagtól való távolsággal egyenlő.

Egy centralizált adatrendszer átlaga nyilván mindig 0. A centralizált adatrendszer második momentumát az eredeti adatrendszer *varianciá*jának vagy *szórásnégyzeté*nek hívjuk. A mi adatrendszerünk varianciája 40.64. A variancia négyzetgyökét, aminek numerikus értéke itt 6.37, *szórás*nak nevezzük.

						átlag	
centralizált adatok	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6	0	
centralizált adatok négyzetei	6.76	12.96	54.76	54.76	73.96	40.64	6.37
						variancia	szórás

Hangsúlyozzuk, hogy a varianciát – például Excellel – mátrixok szorzásával is ki lehet számolni. A centralizált adatokból alkotott sorvektort jobbról szorozva a transzponáltjával, majd osztva az adatok számával (ami itt 5), a varianciát kapjuk:

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 2.6 & 3.6 & -7.4 & -7.4 & 8.6 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 2.6 \\ 3.6 \\ -7.4 \\ -7.4 \\ 8.6 \\ \hline\end{array} \cdot \frac{1}{5} = 40.64$$

A variancia és a szórás arról adnak felvilágosítást, hogy

- az adatrendszer az átlag köré összetömörül-e – ilyenkor a variancia értéke kisebb, vagy
- jobban szóródik – ilyenkor a variancia értéke nagyobb

A következő két adatrendszer mindgyikének az átlaga 100, de a variancia és a szórás a második adatrendszer esetében nagyobb, mint az első esetében Ezzel tudjuk numerikusan kifejezni azt a szemléletes tényt, hogy a második adatrendszer jobban szóródik az átlag körül, mint azi első.

adatok	99	100	97	99	105	9	3
						variancia	szórás

adatok	95	100	85	95	125	225	15
						variancia	szórás

Megjegyzés: Elég természetes dolognak tűnne, hogy egy adatrendszer szóródását az átlagtól való (mindenféle négyzetre emeléstől mentes) távolságoknak az átlagával, az ún. *átlagos abszolút eltérés*sel jellemezzük:

						átlag	
adatok	54	55	44	44	60	51.4	
adatok és átlag különbségei	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6	0	(mindig 0)
távolságok az átlagtól	2.6	3.6	7.4	7.4	8.6	5.92	átlagos abszolút eltérés

Ezzel a természetes fogalommal szépen lehet numerikusan számolni, dolgozni, de – mint az később kiderül – a variancia és a szórás olyan technikai előnyökkel bírnak, amelyek mind az elméletben, mind a gyakorlatban háttérbe szorítják az átlagos abszolút eltérést. Megjegyezzük, hogy egy adatrendszer átlagos abszolút eltérése legfeljebb akkora lehet, mint a szórása.

Vegyük észre, hogy a kiindulásul felvett adatrendszer varianciáját úgy is megkaphatjuk, hogy a második momentumból kivonjuk az első momentum négyzetét:

$$40.64 = 2\,682.6 - (51.4)^2$$

Ez az összefüggés mindig igaz:

$$\text{variancia} = \text{második momentum} - (\text{ első momentum })^2$$

A bizonyítást az Olvasóra bízzuk.

Megjegyzés: Minden olyan kalkulátor, ami tud statisztikai üzemmódban dolgozni, egy-egy gombnyomásra kiadja a betátplált adatrendszer átlagát, varianciáját, szórását. Az Excelben az átlagra, varianciára, szórásra beépített függvények vannak.

Egyszerű algebrai összefüggés a Steiner egyenlőség, és annak következménye a Steiner egyenlőtlenség:

Steiner egyenlőség: Akármilyen c -re igaz, hogy

$$c \text{ -re vonatkozó második momentum} = \text{variancia} + (c \text{ - átlag })^2$$

Steiner egyenlőtlenség: Akármilyen c -re igaz, hogy

$$c \text{ -re vonatkozó második momentum} \geq \text{variancia}$$

$c = \text{ átlag }$ esetén az egyenlőség, más c értékekre az egyenlőtlenség teljesül.

8.2.2. *** Kétdimenziós adatrendszerek

Számpároknak egy sorozatát *kétdimenziós adatrendszer*nek hívjuk. Egy kétdimenziós adatrendszer *átlag*át, *közep*ét a koordináták külön-külön vett átlagából kapjuk.

1. Példa: Kétdimenziós adatrendszer 5 elemből. Az alábbi adatrendszer 5 számpárból áll:

x	54	55	44	44	60
y	85	83	92	65	75

Vegyük most az $x{\cdot}y$ szorzatokat, és tekintsük a szorzatok várható értékét is, amit az eredeti kétdimenziós adatrendszer *vegyes momentum*ának nevezünk:

						átlag
$x \cdot y$	4 590	4 565	4 048	2 860	4 500	4 112.6
						vegyes momentum

A vegyes momentum fogalma akkor jut szerephez, amikor egy kétdimenziós adatrendszerből – például – az

x	54	55	44	44	60
y	85	83	92	65	75

adatrendszerből a megfelelő x és y értékek összeadásával egy új egydimenziós adatrendszert állítunk elő:

$x+y$	139	138	136	109	135

Ennek az egydimenziós adatrendszernek a második momentumát a szokásos módon kiszámíthatjuk. A második momentum értéke $17\,393.4$.

A középiskolai tanulmányainkból jól ismert $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ azonosság mintájára egyszerűen adódik, hogy *az összegzéssel kapott adatrendszer második momentuma egyenlő a külön-külön vett egydimenziós adatrendszerek második momentumainak az összegével plusz 2-szer a vegyes momentum.* A mi numerikus példánkra ez a szabály teljesül:

$$17\,393.4 = 2\,682.6 + 6\,485.6 + 2 \cdot 4\,112.6$$

Az általános formula megfogalmazása és annak algebrai úton való bizonyítása legyen az Olvasó feladata.

Ha a kétdimenziós adatrendszer által definiált mátrixot megszorozzuk jobbról az ő transzponáltjával, és osztunk még az adatok számával (ami itt 5), akkor egy olyan $2x2$-es mátrixot kapunk, melynek

- bal felső eleme az x-koordináták adatrendszerének második momentuma
- jobb alsó eleme az y-koordináták adatrendszerének második momentuma
- a bal alsó és a jobb felső eleme pedig a vegyes momentum

Az állítás igazságát a mi kétdimenziós példánkon ellenőrizhetjük:

$$\begin{bmatrix} 54 & 55 & 44 & 44 & 60 \\ 85 & 83 & 92 & 65 & 75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 54 & 85 \\ 55 & 83 \\ 44 & 92 \\ 44 & 65 \\ 50 & 75 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \begin{bmatrix} 2\,682.6 & 4\,112{,}6 \\ 4\,112.6 & 6\,485{,}6 \end{bmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a neve: a kétdimenziós adatrendszer *második momentum mátrix*a.

8.2.3. *** Kovariancia

Egy kétdimenziós adatrendszer *cenralizáltjá*hoz úgy jutunk, hogy az x értékekből kivonjuk az x értékék átlatgát, az y értékekből az y értékék átlatgát. Az

						átlag
x	54	55	44	44	60	51.4
y	85	83	92	65	75	80

kétdimenziós adatrendszer centralizáltja:

$x - x$ átlag	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6
$y - y$ átlag	5	3	12	-15	-5

A centralizált adatrendszer vegyes momentumát az eredeti adatrendszer *kovarianciá*jának nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy

$$\text{kovariancia} = \text{második momentum} - \text{első momentumok szorzata}$$

A centralizált adatrendszer momentum mátrixát az eredeti adatrendszer *kovariancia mátrixá*nak nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy

$$\text{kovariancia mátirx} = \text{második momentum mátrix} - \text{várható értékek oszlovektora} \cdot \text{várható értékek sorvektora}$$

Ha a kétdimenziós adatrendszer centralizáltja által definiált mátrixot megszorozzuk jobbról az ő transzponáltjával, és osztunk még az adatok számával (ami itt 5), akkor a $2x2$-es kovariancia mátrixot kapjuk, melynek

- bal felső eleme az x-koordináták adatrendszerének varianciája
- jobb alsó eleme az y-koordináták adatrendszerének varianciája
- a bal alsó és a jobb felső eleme pedig a kovariancia

Az állítás igazságát a kétdimenziós példánkon ellenőrizhetjük:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2.6 & 3.6 & -7.4 & -7.4 & 8.6 \\ 5 & 3 & 12 & -15 & -5 \end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{cc} 2.6 & 5 \\ 3.6 & 3 \\ -7.4 & 12 \\ -7.4 & -15 \\ 8.6 & -5 \end{array}} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\begin{array}{cc} 40.6 & 0.6 \\ 0.6 & 85.6 \end{array}}$$

Mint fentebb tisztáztuk: *az összegzéssel kapott adatrendszer második momentuma egyenlő a külön-külön vett egydimenziós adatrendszerek második momentumainak az összegével plusz 2-szer a vegyes momentum.* Ezt a szbályt alkalmazva centralizált kétdimenziós adatrendszerre azt kapjuk, hogy *az összegzéssel kapott adatrendszer varianciája egyenlő a külön-külön vett egydimenziós adatrendszerek varianciáinak az összegével plusz 2-szer a kovariancia*.

8.2.4. *** A kovariancia mátrix transzformálódása

Ha egy kétdimenziós oszlopvektort megszorzunk balról egy $2x2$ -es ún. "transzformációs" mátrixszal, akkor egy másik oszlopvektort kapunk. Ha egy ilyen szorzást megcsiálunk egy kétdimenziós adatrenszer minden oszlpvektorával, akkor egy új kétdimenziós adatrendszert kapunk. Ha az új adatrendszerre előállítjuk a előző részben leírt módon a kovariancia mátrixot, akkor az egész procedúrából balról kiemelhető a $2x2$ -es transzformációs mátrix, jobbról pedig a transzformációs mátrix transzponáltja, és kiadódik a következő szabály: *az új kétdimenziós adatrendszer kovariancia mátrixa egyenlő az eredeti adatrendszer kovariancia mátrix balról megszorozva a transzformációs mátrixszal, jobbról pedig a transzformációs mátrix transzponáltjával*.

Ha a transzformációs mátrix egy olyan sorvektor, mely egy egységvektor koordinátáiból áll, akkor transzformációs mátrixszal balról szorozva egy oszlopvektort a szorzat értéke az oszlopvektornak az egységvektor irányára vonatkozó vetületét adja. Ezért *ha egy egységvektornak megfelelő sorvektorral balról, és az ő transzponáltjával jobbról szorzunk egy kovariancia mátrixot, akkor az eredmény annak az adatrendszernek a varianciáját adja, melyet akkor kapunk, ha a kétdimenziós adatrendszer elemeit a sorvektor irányára vetítjük.*

Ezért a kovariancia mátrix segítségével a kétdimenziós adatrendszer mindenféle vetületeinek a varianciáját ki lehet számolni. Ilyen értelemben a kovariancia mátrix a variancia fogalmának többdimenzióra vonatkozó keterjesztésének tekinthető.

8.3. Várható érték

Tekintsünk egy diszkrét X valószínűségi változót. X lehetséges értékeinek halmazát jelöljük S-sel, az S valamely elemét x-szel, az x-hez tartozó valószínűséget pedig $p(x)$-szel. Ekkor az X valószínűségi változó **várható érték**ének nevezzük az

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x x\, p(x)$$

számot. A kifejezésben - mint korábban is és a későbbiekben is - a szummázás az összes lehetséges x-re értendő.

Ha egy eloszlást csak úgy önmagában - mindenféle valószínűségi változó nélkül - vizsgálunk, akkor a

$$\sum_x x\, p(x)$$

számot az **eloszlás várható érték**ének nevezzük. számot.

1. Megjegyzés: Ezeket a képleteket a súlypont képletével összevetve azonnal szembetünik, hogy $\sum\limits_x p(x) = 1$ feltétel teljesülése miatt a súlypont képlete a várható érték képletébe megy át. Tehát egy valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a várható érték egybeesik a tömegeloszlás súlypontjával.

Kicsit általánosabban, ha a szóbanforgó valószínűségi változó mellett még egy $y = t(x)$ transzformációt is tekintünk, és képezzük a $t(X)$ valószínűségi változót, akkor a

$$\mathrm{E}\,(\,t(X)\,) = \sum_x t(x)\; p(x)$$

számot a transzformációval nyert **a** $t(X)$ **valószínűségi változó várható érték**ének nevezzük.

Ha egy eloszlást csak úgy önmagában - mindenféle valószínűségi változó nélkül - vizsgálunk, akkor a

$$\sum_x t(x)\; p(x)$$

számot a szóbanforgó eloszlásból **a** t **transzformációval kapott eloszlás várható értéké**nek nevezzük.

2. Megjegyzés: Ha a t függvény a négyzetre emelés függvénye, azaz $t(x) = x^2$, akkor a

$$\sum_x x^2\; p(x)$$

kifejezéshet jutunk. Ezt az értékét a valószínűségi változó avagy a szóbanforgó eloszlás **második momentum**ának nevezzük. A valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a második momentum egybeesik a tömegeloszlásnak a 0 pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával.

3. Megjegyzés: Ha a t függvény az identitás függvény, azaz $t(x) = x$, akkor a

$$\sum_x x\; p(x)$$

kifejezéshet jutunk, ami a várható érték képlete. Ezt a képletet a második momentummal összevetve látjuk, hogy a várható értéket jogos **első momentum**nak is nevezni.

4. Megjegyzés: Ha a lehetséges értékeket indexezve soroluk fel: $x_1, x_2, \ldots$, és a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig $p_1, p_2, \ldots$-vel jelöljük, akkor a képletek így festenek:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i\; p_i$$

$$\mathrm{E}\,(\,t(X)\,) = \sum_i t(x_i)\; p_i$$

5. Megjegyzés: Jelöljük X-szel a kockadobás eredményét. X^2 várható értékét szemléletesen úgy is kiszámolhatnánk, hogy a dobókocka oldalaira új címkéket ragasztanánk $1, 4, 9, 16, 25, 36$ számokkal. Így nem meglepő, hogy $\mathrm{E}(t(X))$ képletében a $p(x)$ értékek változatlanok maradnak, míg x-eket mindenhol formálisan kicseréljük $t(x)$-re.

6. Megjegyzés: Ha X lehetséges értékeinek S halmaza végtelen sok elemet tartatlmaz, akkor a fenti sorok végtelen sorok, ezért ilyenkor elofordulhat, hogy a a sor nem konvergens, hanem értéke plusz- vagy mínusz végtelen, vagy akár az is, hogy a sor értéke nem definált, mert a sor pozitív tagjaiból álló sor és a negatív tagjaiból álló sor is divergál, és ezért a $-\infty + \infty$ alakú, nem értelmezhető eset áll elő. Ha X lehetséges értékeinek S halmaza csak véges sok elemet tartatlmaz, akkor ilyen nem fordulhat elő, és a várható érték egy jól definiált szám.

8.4. Variancia és szórás

Ha c egy szám, akkor a valószínűségi változó, illetve az eloszlás c-re vonatkozó második momuentumának nevezzük a

$$\sum_x (x-c)^2 \, p(x)$$

értéket. A valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a c-re vonatkozó második momuentum egybeesik a tömegeloszlásnak a c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával. Ha c az eloszlás várható értéke, akkor a második momuentum neve **variancia** vagy **szórásnégyzet**, amit VAR(X)-szel jelölünk. A valószínűségi eloszlást tömegeloszlásként is elképzelve látjuk, hogy a variancia egybeesik a tömegeloszlásnak a súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékával.

A variancia négyzetgyökét, a

$$\sqrt{\sum_x (x-c)^2 \, p(x)}$$

számot **szórás**nak hívjuk, és SD(X)-vel jelöljük.

Megjegyzés: Emlékeztetünk rá, hogy egy valószínűségi változó, illetve egy eloszlás 0-ra vonatkozó második momentumát, a

$$\sum_x x^2 \, p(x)$$

számot egyszerűen csak **második momuentum**nak nevezzük. Könnyű belátni, hogy igaz a

$$\text{variancia} = \text{második momentum} - (\text{ első momentum })^2$$

összefüggés.

8.5. Diszkrét szimuláció

Vegyünk fel 1-nél kisebb pozitív számoknak egy véges sok tagból álló, növekedő sorozatát! Például egy 3 tagból sorozat:

$$0.2\,, \quad 0.6\,, \quad 0.7$$

Most egy táblázatot alkotunk, melynek első sora 0 -val kezdődik, aztán következnek a sorozat tagjai, a második sorba pedig írjunk négy akármilyen számot, például a 10, 20, 30, 40 számokat:

0	0.2	0.6	0.7
10	20	30	40

Ha egy ilyen táblázatot készítünk Excelben, akkor

angolul: `HLOOKUP( RAND() ; * ; 2 )` magyarul: `VKERES( VÉL() ; * ; 2 )`

utasítás, ahol * helyén a táblázatra való hivatkozás áll, számunkra előnyösen működik. A generált véletlen számot összehasonlítja a táblázat első sorában lévő számokkal, és megkeresi a sorban azt az elemet, amelyik egyenlő vagy éppen alatta van a generált véletlen értéknek, és az utasítás értékéül a második sorból veszi azt az elemet, amit az első sorban talált elem alatt van. Tehát

- ha a véletlen érték 0 és 0.2 közé esik, vagy 0 -val egyenlő, akkor a függvény értéke 10

- ha a véletlen érték 0.2 és 0.6 közé esik, vagy 0.2 -del egyenlő, akkor a függvény értéke 20
- ha a véletlen érték 0.6 és 0.7 közé esik, vagy 0.6 -del egyenlő, akkor a függvény értéke 30
- ha a véletlen érték 0.7 és 1 közé esik, vagy 0.7 -del egyenlő, akkor a függvény értéke 40

Mivel

- a $[\ 0\ ;\ 0.2\ ]$ intervallum hossza 0.2
- a $[\ 0.2\ ;\ 0.6\ ]$ intervallum hossza 0.4
- a $[\ 0.6\ ;\ 0.7\ ]$ intervallum hossza 0.1
- a $[\ 0.7\ ;\ 1\ ]$ intervallum hossza 0.3

a függvény értéke

- 0.2 valószínűséggel 10
- 0.4 valószínűséggel 20
- 0.1 valószínűséggel 30
- 0.3 valószínűséggel 40

Tehát a

```
HLOOKUP( RAND() ; * ; 2 )      VKERES( VÉL() ; * ; 2 )
```

Excel függvénnyel generált valósszínűségi változó eloszlása

x	10	20	30	40
$p(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

Könnyű észrevenni, hogy milyen számokat kell az Excel táblázatba írni ahhoz, hogy adott véges diszkrét eloszlást követő valószínűségi változót kapjunk ezzel a módszerrel.

Például a megadott eloszlás legyen a következő:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.05	0.10	0.15	0.3	0.25	15

Ekkor az Excel táblázatot így kell elkészíteni:

0	0.05	0.15	0.30	0.60	0.85
1	2	3	4	5	6

Az Excel táblázat első sorában álló számokat a 0 után összegzéssel kaptuk meg a megadott eloszlás valószínűségeiből:

$$0.05 = 0 + 0.05$$

$$0.15 = 0 + 0.05 + 0.10$$

$$0.30 = 0 + 0.05 + 0.10 + 0.15$$

$$0.60 = 0 + 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.30$$

$$0.85 = 0 + 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.30 + 0.25$$

8.6. Nagy számok törvényei

Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból fontos tény, hogy nagy számú kísérletek eredményeinek átlaga, szórása és sok egyéb jellemzői – bár függnek a véletlentől – mégis egy fajta stabilitást mutatnak, mert értékük közel van egy olyan értékhez, amit elméleti úton – a kísréletek elvégzése nélkül – is meg lehet határozni. Erre a tényre, mint a nagy számok törvényeire szoktunk hivatkozni.

8.6.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül az X várható értékével egyenlő:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(\,X\,)$$

Vázlatos bizonyítás: Az X valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek

$$x_1,\ x_2, \ldots$$

Jelölje

$$N_1,\ N_2, \ldots$$

a lehetséges értékek gyakoriságait az N kísérlet során. Tehát minden i esetén N_i azt mutatja, hogy x_i hányszor következik be az N kísérlet során. Tudjuk, hogy minden i-re az N_i/N relatív gyakoriság – nagy N esetén – közel van a p_i valószínűséghez. Az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

kifejezés számlálója N darab tagból áll. Közöttük az x_1 érték N_1-szer, az x_2 érték N_2-ször, ... fordul elő. Ezért a számláló értéke

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_N = N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \ldots$$

a tört értéke pedig

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \ldots}{N} =$$

$$= \frac{N_1}{N} \cdot x_1 + \frac{N_2}{N} \cdot x_2 + \ldots \approx p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots = \mathrm{E}(\,X\,)$$

***** Precíz megfogalmazás:**

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \sum_x x\ p(x)$ sor értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül, ha

   - a sor véges sok tagból áll, azaz az X valószínűségi változónak csak véges sok lehetséges értéke van, vagy
   - végtelen sok tag esetén – ha a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_x |x|\ p(x) < \infty$.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

   $$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \to \mathrm{E}(\,X\,)$$

   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \sum_x x\ p(x)$ sor értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{x>0}\ x\ p(x)$ divergens, és
   - a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{x<0}\ x\ p(x)$ konvergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az

   $$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \to +\infty$$

   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ X\ ) = \sum_x x\ p(x)$ sor értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{x>0}\ x\ p(x)$ konvergens, és
   - a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{x<0}\ x\ p(x)$ divergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}\ \to\ -\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

8.6.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket egy $t(x)$ függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott
$$t(X_1)\ ,\ t(X_2)\ ,\ \ldots, t(X_N)$$
értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X)$ várható értékével egyenlő:
$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N}\ \approx\ \mathrm{E}(\ t(X)\ )$$

Vázlatos bizonyítás: Az X valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek
$$x_1,\ x_2, \ldots$$
Jelölje
$$N_1,\ N_2, \ldots$$
a lehetséges értékek gyakoriságait az N kísérlet során. Tehát minden i esetén N_i azt mutatja, hogy x_i hányszor következik be az N kísérlet során. Tudjuk, hogy minden i-re az N_i/N relatív gyakoriság – nagy N esetén – közel van a p_i valószínűséghez. A
$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N}$$
kifejezés számlálója N darab tagból áll. Közöttük a t függvény argumentumaként az x_1 érték N_1-szer, az x_2 érték N_2-ször, … fordul elő. Ezért a számláló értéke
$$t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N) = N_1 \cdot t(x_1) + N_2 \cdot t(x_2) + \ldots$$
a tört értéke pedig
$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} = \frac{N_1 \cdot t(x_1) + N_2 \cdot t(x_2) + \ldots}{N} =$$
$$= \frac{N_1}{N} \cdot t(x_1) + \frac{N_2}{N} \cdot t(x_2) + \ldots \approx p_1 \cdot t(x_1) + p_2 \cdot t(x_2) + \ldots\ =\ \mathrm{E}(\ t(X)\ )$$

***** Precíz megfogalmazás:**

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \sum_x t(x)\ p(x)$ sor értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül, ha

   - a sor véges sok tagból áll, azaz az X valószínűségi változónak csak véges sok lehetséges értéke van, vagy
   - végtelen sok tag esetén – ha a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_x |t(x)|\ \ p(x) < \infty$.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a
$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N}\ \to\ \mathrm{E}(\ t(X)\ )$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\, t(X)\,) = \sum_x t(x)\; p(x)$ sor értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0}\; x\; p(x)$ divergens, és
   - a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0}\; x\; p(x)$ konvergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \;\to\; +\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\, t(X)\,) = \sum_i t(x_i)\; p_i = \sum_i t(x)\; p(x)$ sor értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0}\; x\; p(x)$ kovergens, és
   - a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0}\; x\; p(x)$ divergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \;\to\; -\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

8.6.3. NSZT a második momentumra

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények második momentumára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X második momentumával egyenlő:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N} \;\approx\; \mathrm{E}(\, X^2\,)$$

Bizonyítás: Ha az előző részben a $t(x) = x^2$ speciális függvényt vesszük akkor azonnal megkapjuk az állítást.

8.6.4. NSZT a varianciára

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N}$$

varianciájára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N} \approx \mathrm{VAR}(X)$$

Vázlatos bizonyítás: Ugyanis, ha az $\overline{X}_N$ átlag helyére az $\mathrm{E}(\, X\,)$ várható értéket írjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N} \approx$$

$$\approx \frac{(X_1 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + (X_2 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + \ldots + (X_N - \mathrm{E}(\, X\,))^2}{N}$$

A jobb oldalon álló átlag az $(X - \mathrm{E}(\, X\,))^2$ valószínűségi változó várható értékéhez van közel, ami éppen az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(X_1 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + (X_2 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + \ldots + (X_N - \mathrm{E}(\, X\,))^2}{N} \approx \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(\, X\,))^2\right) = \mathrm{VAR}(X)$$

8.6.5. NSZT a szórásra

Így aztán nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények szórása – igen általános feltételek mellett – körülbelül az X szórásával egyenlő:

$$\sqrt{\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_N-\overline{X})^2}{N}} \approx \mathrm{SD}(X)$$

8.7. Várható érték tulajdonságai

A várható érték, a variancia, a szórás legfontosabb összefüggéseiben

- n pozitív egész számot,
- $X,\ Y,\ Z,\ \ X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat,
- $a, b, c,\ a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számokat jelölnek.

Az elméleti összefügéseket valószínűségi változókra mondjuk ki. Remélhetőleg az Olvasó tisztában van vele, hogyan kell a valószínűségi változók egyes jellemzőit a valószínűségi változó eloszlásából meghatározni, és ezért a valószínűségi változókra kimondott összefüggéseket le tudja fordítani az eloszlások nyelvére is.

1. *Valószínűségi változó konstansszorosának a várható értéke:*

$$\mathrm{E}(c\,X) = c\,\mathrm{E}(X)$$

2. *A várható érték összegzési tulajdonsága:*
   - Két tagra:
   $$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$$
   - Több tagra:
   $$\mathrm{E}(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2)+\ldots+\mathrm{E}(X_n)$$

3. *A várható érték linearitási tulajdonsága:*
   - Két tagra:
   $$\mathrm{E}(a\,X+b\,Y) = a\,\mathrm{E}(X)+b\,\mathrm{E}(Y)$$
   - Több tagra:
   $$\mathrm{E}(a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n) = a_1\mathrm{E}(X_1)+a_2\mathrm{E}(X_2)+\ldots+a_n\mathrm{E}(X_n)$$

4. *Összeg várható értéke, amikor a tagok várható értéke azonos:*
   Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók mindegyikének a várható értéke μ, akkor
   $$\mathrm{E}(X_1+X_2+\ldots+X_n) = n\mu$$

5. *Átlag várható értéke, amikor a tagok várható értéke azonos:*
   Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók mindegyikének a várható értéke μ, akkor
   $$\mathrm{E}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right) = \mu$$

6. *Független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke:*
   Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor
   $$\mathrm{E}(\,X\cdot Y\,) = \mathrm{E}(X)\;\cdot\;\mathrm{E}(Y)$$

8.8. Variancia tulajdonságai

1. *Valószínűségi változó konstansszorosának a varianciája:*

$$\text{VAR}(cX) = c^2 \text{ VAR}(X)$$

2. *Független valószínűségi változók összegének a varianciája:*
   Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor

$$\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$$

3. *Független valószínűségi változók összegének a varianciája, ha a tagok varianciája azonos:*
   Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, melyek mindegyikének a varianciája σ^2, akkor

$$\text{VAR}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n\,\sigma^2$$

   Megjegyzés: Ha X és Y nem függetlenek, akkor ez a szabály általában nem igaz.

4. *Független valószínűségi változók átlagának a varianciája, ha a tagok varianciája azonos:*
   Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, melyek mindegyikének a varianciája σ^2, akkor

$$\text{VAR}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

8.9. Szórás tulajdonságai

1. *Valószínűségi változó konstansszorosának a szórása:*

$$\text{SD}(c\,X) = |c|\ \text{SD}(X)$$

2. *Független valószínűségi változók összegének a szórása:*
   Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor

$$\text{SD}^2(X + Y) = \text{SD}^2(X) + \text{SD}^2(Y)$$

   azaz

$$\text{SD}(X + Y) = \sqrt{\text{SD}^2(X) + \text{SD}^2(Y)}$$

3. *Négyzetgyök szabály az összeg szórására:*
   Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, melyek mindegyikének a szórása σ, akkor

$$\text{SD}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{n}\,\sigma$$

4. *Négyzetgyök szabály az átlag szórására:*
   Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók, melyek mindegyikének a szórása σ, akkor

$$\text{SD}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

8.10. Nevezetes eloszlások jellemzői

- Az p paraméterű **Bernoulli vagy indikátor eloszlás**
  várható értéke: $\mathrm{E}(X) = p$
  varianciája: $VAR(X) = p\,(1-p)$
  szórása: $\mathrm{SD}(X) = \sqrt{p\,(1-p)}$
  módusza:
  Ha $p = \frac{1}{2}$, akkor két módusz van a 0 és az 1
  Ha $p < \frac{1}{2}$, akkor egy módusz van, a 0
  Ha $p > \frac{1}{2}$, akkor egy módusz van, az 1

- Az (n, p) paraméterű **binomiális eloszlás**
  várható értéke: $\mathrm{E}(X) = n\,p$
  varianciája: $VAR(X) = n\,p\,(1-p)$
  szórása: $\mathrm{SD}(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$
  módusza:
  Ha $(n+1)\,p$ egész, akkor két módusz van: $(n+1)\,p$ és $(n+1)\,p - 1$
  Ha $(n+1)\,p$ nem egész, akkor egy módusz van: $\lfloor (n+1)\,p \rfloor$

- A λ paraméterű **Poisson eloszlás**
  várható értéke: λ
  varianciája: λ
  szórása: $\sqrt{\lambda}$
  módusza:
  Ha λ egész, akkor két módusz van: λ és $\lambda - 1$
  Ha λ nem egész, akkor egy módusz van: $\lfloor \lambda \rfloor$

Feladat: Telefonhívások. Tanszékünkre a délelőtti órákban óránként átlagosan 3.3 telefonhívás érkezik. Mi a valószínűsége annak, hogy

1. délelőtt 9 és 10 óra között pontosan 4 hívás érkezik?
2. délelőtt 9 és 11 óra között pontosan 4 hívás érkezik?
3. délelőtt 9 és 11 óra között 4 -nél több hívás érkezik?

Megoldás: Egy adott időintervallumban a hívások száma Poisson eloszlást követ. Egy óra alatt a várható érték 3.3, két óra alatt 6.6. Ezért

1.
$$\text{P(délelőtt 9 és 10 között pontosan 4 hívás)} =$$
$$= \frac{(3.3)^4}{4!}\,\mathrm{e}^{-3.3} = \texttt{POISSON(4 ; 3.3 ; FALSE)} = 0.18$$

2.
$$\text{P(délelőtt 9 és 11 között pontosan 4 hívás)} =$$
$$= \frac{(6.6)^4}{4!}\,\mathrm{e}^{-6.6} = \texttt{POISSON(4 ; 6.6 ; FALSE)} = 0.11$$

3.
$$\text{P(délelőtt 9 és 11 között 4 -nél több hívás)} =$$
$$= 1 - \text{P(délelőtt 9 és 11 között 4 vagy kevesebb hívás)} =$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{(6.6)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-6.6} = \texttt{1 - POISSON(4 ; 6.6 ; TRUE)} = 0.79$$

Feladat: Csillaghullás. Fogadjuk el, hogy augusztus közepén átlagoslan kb. 10 percenként lehet egy-egy csillaghullást látni. Mi a valószínűsége annak, hogy 15 perc alatt (pontosan) 2 csillaghullást lát valaki?

Megoldás: A 15 perc alatti csillaghullások száma Poisson eloszlást követ, hiszen sok a meteorit a világűrben, melyek egymással mit sem törődve száguldoznak, és minden meteortira igaz, hogy a tekintett 15 perc alatt kis eséllyel lép be a a fejünk felett a légkörbe. Mivel átlagosan 10 percenként jönnek a csillaghullások, 15 perc alatt a csillaghullások számának a várható értéke 1.5. A Poisson eloszlás paraéátere 1.5. Ezért a kérdezett valószínűség:

$$\text{P(2 csillaghullás)} = \frac{(1.5)^2}{2!}\, \mathrm{e}^{-1.5} =$$
$$= \texttt{POISSON(2 ; 1.5 ; FALSE)} = 0.25$$

- A p paraméterű **optimista geometriai eloszlás**
  várható értéke: $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$
  varianciája: $VAR(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$
  szórása: $\mathrm{SD}(X) = \frac{\sqrt{(1-p)}}{p}$
  módusza: 1

- A p paraméterű **pesszimista geometriai eloszlás**
  várható értéke: $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$
  varianciája: $\mathrm{VAR}(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$
  szórása: $\mathrm{SD}(X) = \frac{\sqrt{(1-p)}}{p}$
  módusza: 0

- A (M, N, n) paraméterű **hipergeometrikus eloszlás**
  várható értéke: $\mathrm{E}(X) = n\, \frac{M}{N}$
  varianciája: $VAR(X) = n\, \frac{N-n}{N-1}\, \frac{M}{N}\, (1 - \frac{M}{N})$
  szórása: $\mathrm{SD}(X) = \sqrt{n\, \frac{N-n}{N-1}\, \frac{M}{N}\, (1 - \frac{M}{N})}$
  módusza:
  Ha $(n+1)\, \frac{M+1}{N+2}$ egész szám, akkor két módusz van: $(n+1)\, \frac{M+1}{N+2}$ és $(n+1)\, \frac{M+1}{N+2} - 1$
  Ha $(n+1)\, \frac{M+1}{N+2}$ nem egész szám, akkor egy módusz van: $\left\lfloor (n+1)\, \frac{M+1}{N+2} \right\rfloor$

- Az (r, p) paraméterű **optimista negatív binomiális eloszlás**
  várható értéke: $\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p}$
  varianciája: $\mathrm{VAR}(X) = \frac{r\,(1-p)}{p^2}$
  szórása: $\mathrm{SD}(X) = \frac{\sqrt{r\,(1-p)}}{p}$
  módusza:
  Ha $\frac{r-1}{p}$ egész, akkor két módusz van: $\frac{r-1}{p} + 1$ és $\frac{r-1}{p}$
  Ha $\frac{r-1}{p}$ nem egész, akkor egy módusz van: $\left\lfloor \frac{r-1}{p} \right\rfloor + 1$

- Az (r, p) paraméterű **pesszimista negatív binomiális eloszlás**
  várható értéke: $\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p} - r = r\, \frac{1-p}{p}$
  varianciája: $\mathrm{VAR}(X) = \frac{r\,(1-p)}{p^2}$
  szórása: $\mathrm{SD}(X) = \frac{\sqrt{r\,(1-p)}}{p}$

módusza:

Ha $\frac{r-1}{p}$ egész, akkor két módusz van: $\frac{r-1}{p} - r + 1$ és $\frac{r-1}{p} - r$

Ha $\frac{r-1}{p}$ nem egész, akkor egy módusz van: $\left\lfloor \frac{r-1}{p} \right\rfloor - r + 1$

Feladat: Autóstop – eloszlások: Képzeljük el, hogy valaki valahol Nógrád megyében egy aránylag kis forgalmú út-kereszteződésben tanulmányozza az autósop lehetőségeit. Ezért kiállál a sarokra, és megfigyeléseket végez. Segítsünk neki! Mondjuk meg, hogy az alábbi valószínűségi változók milyen eloszlást követnek?

1. *Ahány kocsi megáll az első 10 odaérkező kocsi közül*
2. *Ahány kocsi jön 10 perc alatt*
3. *Ahány kocsi megáll 10 perc alatt*
4. *Ahány kocsi jön 20 perc alatt*
5. *Ahány kocsi megáll 20 perc alatt*
6. *Ahányadik az a kocsi, amelyik elsőnek megáll*
7. *Ahány kocsi elmegy, mielőtt az első megáll*
8. **** Ahányadik az a kocsi, amelyik másodiknak megáll*
9. **** Ahányadik az a kocsi, amelyik harmadiknak megáll*
10. **** Ahány kocsi elmegy, mielőtt a második megáll*
11. **** Ahány kocsi elmegy, mielőtt a harmadik megáll*

Válaszok: Csak a válaszokat adjuk meg, a magyarázat kigondolása az Olvasó feladata.

1. *Ahány kocsi megáll az első 10 odaérkező kocsi közül*
   binomilis eloszlást követ
2. *Ahány kocsi jön 10 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
3. *Ahány kocsi megáll 10 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
4. *Ahány kocsi jön 20 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
5. *Ahány kocsi megáll 20 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
6. *Ahányadik az a kocsi, amelyik elsőnek megáll*
   optimista geometriai eloszlást követ
7. *Ahány kocsi elmegy, mielőtt az első megáll*
   pesszimista geometriai eloszlást követ
8. **** Ahányadik az a kocsi, amelyik másodiknak megáll*
   másodrendű optimista negatív binomiális eloszlást követ
9. **** Ahányadik az a kocsi, amelyik harmadiknak megáll*
   harmadrendű, optimista negatív binomiális eloszlást követ
10. **** Ahány kocsi elmegy, mielőtt a második megáll*
    másodrendű, pesszimista negatív binomiális eloszlást követ
11. **** Ahány kocsi elmegy, mielőtt a harmadik megáll*
    harmadrendű, pesszimista negatív binomiális eloszlást követ

Feladat: Autóstop – paraméterek: Tegyük fel, hogy óránként – mondjuk – átlagosan 15 autó halad el a kereszteződésben. Tegyük fel még azt is, hogy az autósoknak – mondjuk – a 40 %-a vesz fel stoposokat. Em tények birtokában adjuk meg az előző feladatban definiált valószínűségi változók eloszlásainak a paramétereit is!

Válaszok: Csak a válaszokat adjuk meg, a magyarázat kigondolása az Olvasó feladata.

1. *Ahány kocsi megáll az első 10 odaérkező kocsi közül*
   binomilis eloszlást követ
   $n = 10$, $p = 0.4$ paraméterekkel

2. *Ahány kocsi jön 10 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
   $\lambda = 15/6 = 2.5$ paraméterrel

3. *Ahány kocsi megáll 10 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
   $\lambda = 2.5 \cdot 0.4 = 1$ paraméterrel

4. *Ahány kocsi jön 20 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
   $\lambda = 2 \cdot 2.5 = 5$ paraméterrel

5. *Ahány kocsi megáll 20 perc alatt*
   Poisson eloszlást követ
   $\lambda = 5 \cdot 0.4 = 2$ paraméterrel

6. *Ahányadik az a kocsi, amelyik elsőnek megáll*
   optimista geometriai eloszlást követ
   $p = 0.4$ paraméterrel

7. *Ahány kocsi elmegy, mielőtt az első megáll*
   pesszimista geometriai eloszlást követ
   $p = 0.4$ paraméterrel

8. *** *Ahányadik az a kocsi, amelyik másodiknak megáll*
   másodrendű optimista negatív binomiális eloszlást követ
   $r = 2$, $p = 0.4$ paraméterekkel

9. *** *Ahányadik az a kocsi, amelyik harmadiknak megáll*
   harmadrendű, optimista negatív binomiális eloszlást követ
   $r = 3$, $p = 0.4$ paraméterekkel

10. *** *Ahány kocsi elmegy, mielőtt a második megáll*
    másodrendű, pesszimista negatív binomiális eloszlást követ
    $r = 2$, $p = 0.4$ paraméterekkel

11. *** *Ahány kocsi elmegy, mielőtt a harmadik megáll*
    harmadrendű, pesszimista negatív binomiális eloszlást követ
    $r = 3$, $p = 0.4$ paraméterekkel

9. Folytonos eloszlások

9.1. Ismétlés kalkulusból

Válasszunk egy olyan $f(x)$ függvényt, melyre az alábbi két feltétel teljesül:

- $f(x) \geq 0$ minden x-re
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Az első feltétel miatt beszélhetünk az $f(x)$ függvény alatti és az x tengely feletti T tartományról. A második feltétel miatt a T tartomány területe 1-gyel egyenlő. Kalkulusból jól ismerjük **az** $f(x)$ **terület-függvénye**-ként adódó **primitív függvény**ét:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

aminek deriváltjaként - minden olyan x helyen, ahol az f függvény folytonos - az $f(x)$ -et kapjuk vissza:

$$F'(x) = f(x)$$

A derivált - mint tudjuk - különbségek határértéke:

$$f(x) = \lim_{a,b\to x} \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

amit úgy is lehet mondani, hogy x-hez közeli a és b esetén

$$f(x) \approx \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

vagy akár úgy is, hogy

$$F(b) - F(a) \approx f(x)\ (b - a)$$

A primitív függvény jól ismert tulajdonsága, hogy segítségével egy határozott integrál értékét egyszerűen különbségként kaphatjuk meg:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ez a jól ismert Newton-Leibniz formula. Hangsúlyozzuk, hogy a Newton-Leibniz formulában a és b nem kell hogy közel legyenek egymáshoz.

9.2. Folytonos valószínűségi változók

Az élet szinte mindenhol produkál olyan valószínűségi változókat, melyek lehetséges értékei külön-külön nulla valószínűségűek,de ennek ellenére a lehetséges értékek együttesen egy intervallumokat tesznek ki. Mivel az intervallumok több mint megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, az ilyen valószínűségi változók nem tekinthetőek diszkréteknek. Példák:

- $X =$ a hőmérséklet (mondjuk Celsius fokokban mérve) egy adott helyen éjfélkor
- $X =$ amennyi időt reggelente várnom kell a villamosra
- $X =$ egy véletlenszerűen választott ember testmagassága
- $X =$ egy véletlenszerűen választott ember testsúlya
- $X =$ a tényleges áramerősség egy áramkörben egy adott pontban

Ezekre a valószínűségi változókra az is teljesül, hogy minden lehetséges értéküket nulla valószínűséggel veszik fel. Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékei egy inteervallumot teszen ki, és a valószínűségi változó minden lehetséges értékét nulla valószínűséggel veszi fel, akkor a valószínűségi változót **folytonos**nak mondjuk.

Emlékeztetünk rá, hogy - a fentiekkel ellentétben - egy diszkrét valószínűségi változó a lehetséges értékeit pozitív valószínűséggel veszi fel.

9.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó **eloszlásfüggvény**ének nevezzük azt az F függvényt, melynek egy x helyen vett értékét (vagyis az $F(x)$-szel jelölt számot) így definiáljuk:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \leq x\right)$$

Az eloszlásfüggvények egy x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó milyen valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb vagy egyenlő értéket. Folytonos valószínűségi változó esetén minden x érték valószínűsége 0-val egyenlő, ezért a definícióban "kisebb vagy egyenlő" helyett "kisebb" is írható:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X < x\right)$$

Megjegyezzük, hogy ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor minden pozitív valószínűségű x lehetséges érték esetén a $\mathrm{P}\left(X \leq x\right)$ valószínűség nagyobb a $\mathrm{P}\left(X < x\right)$ valószínűségnél éppen annyival, amennyi a x valószínűsége:

$$\mathrm{P}\left(X \leq x\right) - \mathrm{P}\left(X < x\right) = \mathrm{P}\left(X = x\right)$$

Könnyű látni, hogy teljesülnek az alábbiak:

Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart a 0-hoz
3. ha x tart a $(+\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart az 1-hez
4. változó eloszlásfüggvényének a grafikonja vízszintes vonalakból és ugrásokból áll: az ugrások azoknál az x értékeknél vannak, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Egy ilyen x helyen az ugrás nagysága pedig megegyezik az x érték valószínűségével.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan diszkrét valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart a 0-hoz
3. ha x tart a $(+\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart az 1-hez
4. mindenhol folytonos

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan folytonos valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Nyilvánvaló tény, hogy ha egy sűrűségfüggvény egy intervallumban mindenhol pozitív, akkor ebben az intervallumban az eloszlásfüggvény szigorúan monoton nővekszik.

Mostantól csak a folytonos esettel foglalkozunk. Az $F(x)$ függvény deriváltját jelöljük $f(x)$ -szel: $f(x) = F'(x)$. A $f(x)$ függvény neve: **sűrűségfüggvény**. Tetszőleges $[a, b]$ intervallum esetén az intervallumba esés

$$\mathrm{P}\left(a \leq X \leq b\right)$$

valószínűsége az $F(x)$ megváltozásával írható:

$$\mathrm{P}\left(a \leq X \leq b\right) = F(b) - F(a)$$

Az $F(x)$ megváltozása pedig - a Newton-Leibniz szabály szerint - az f integráljával egyenlő:

$$\mathrm{P}\left(a \leq X \leq b\right) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Mivel most csak folytonos valószínűségi változókról beszélünk, ha a zárt $[a, b]$ intervallum helyett a nyílt (a, b) intervallumot tekintettük volna, ugyanezt az értéket kaptuk volna:

$$\mathrm{P}\left(a < X < b\right) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

A sűrűségfüggvény jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Igaz a következő állítás: *Ha egy $f(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan valószínűségi változót definiálni, melynek sűrűségfüggvénye ez a függvény.*

Tekintsünk most az x pont körül egy pici intervallumot, ami lehet például az $[x; x + \delta x]$ intervallum, ahol Δx egy pici pozitív szám. Az előbbieket az $a = x$, $b = x + \Delta x$ szereposztás mellett alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \Delta x\right) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$

A jobboldalon álló integrált $f(x)\Delta x$-szel közelíthetjük, ezért

$$\mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \Delta x\right) \approx f(x)\Delta x$$

vagyis

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \Delta x\right)}{\Delta x}$$

Jól jegyezzük meg: a sűrűségfüggvény értéke egy x helyen megadja azt, hogy egy x körüli pici intervallum valószínűsége körülbelül hányszorosa az intervallum hosszának.

9.4. Medián

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész, és a tőle jobbra lévő rész is pontosan $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}\left(\ (-\infty; x]\ \right)\ =\ \mathrm{P}\left(\ [x; +\infty)\ \right)\ =\ \frac{1}{2}$$

Ilyenkor az x számot **medián**nak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy olyan eloszlásnak, mely szimetrikus valamilyen pontra, a szimetriapont a mediánja is.

Megjegyzés. Bár gyakorlai jelentősége nincs, megemlítjük, hogy ha x_1 és x_2 olyan számok, hogy $(-\infty; x_1]$ és $[x_2; +\infty)$ intervallumok mindegyikének $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, akkor az $[x_1; x_2]$ intervallum minden pontja medián,.

9.5. Várható érték, variancia, szórás

Egy folytonos X valószínűségi változó *várható értéke*:

$$\mathrm{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

tetszőleges $t(X)$ *függvényének várható értéke*:

$$\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x) f(x) dx$$

szórásnégyzetének (*varianciájának)* definíciója:

$$\sigma^2 = \text{VAR}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

szórása:

$$\sigma = \text{SD}(X) = \sqrt{\text{E}(X^2) - (\,\text{E}(X)\,)^2}$$

Látható, hogy egy valószínűségi változó várható értéke a folytonos esetben is ott van, ahol a megfelelő tömegeloszlás tömegközéppontja, a varianciája pedig annyi, amennyi a tömegeloszlásnak a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. A szórásnégyzet (variancia), kiszámítása a folytonos esetben is a (diszkrét esetből már ismert)

$$\text{VAR}(X) = \text{E}(X^2) - (\,\text{E}(X)\,)^2$$

szabály alapján történhet.

10. Nagy számok törvényei újra

Fontosságuk miatt folytonos valószínűségi változókra – kis módosításokkal – elismételjük a diszkrét valószínűségi változókra már megfogalmazott nagy számok törvényeit.

10.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül az X várható értékével egyenlő:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\approx\; \text{E}(\,X\,)$$

Vázlatos bizonyítás: Vegyük fel a számegyenesen az x_i $,(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ pontokat úgy, hogy szomszédos x_i, x_{i+1} pontok távolsága, amit Δx_i -szel jelölünk, kicsi legyen minden i-re. Az X valószínűségi változó megfigyelt értékét az $[x_i, x_{i+1})$ intervallumban kerekítsük le x_i-re, és a kapott értéket jelöljük Y-nal:

$$Y = x_i \quad \text{ha} \quad x_i \leq X < x_{i+1}$$

Az Y diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei az x_i $,(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ számok, és minden egyes i-re az x_i valószínűsége:

$$\text{P}(\,Y \;=\; x_i) \;=\; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Y várható értéke:

$$\text{E}(\,Y\,) = \sum_i \; x_i \, \text{P}(\,Y \;=\; x_i) \;= \sum_i \; x_i \; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Mivel Y értéke és X értéke csak kicsit tér el, a kísérleti eredmények átlagai is csak kicsit térnek el:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\approx\; \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N}{N}$$

Mivel Δx_i minden i-re kicsi, az alábbi közelítésekkel élhetünk:

$$\text{P}(\,Y \;=\; x_i) \;=\; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \;\approx\; f(x_i)\cdot\Delta x_i \qquad\qquad (i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

$$\text{E}(\,Y\,) = \sum_i \; x_i \; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \;\approx\; \sum_i \; x_i \; f(x_i)\cdot\Delta x_i \;\approx\; \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

Mindezt felhasználva kapjuk, hogy az X-re végzett kísérleti eredmények átlaga közel van X várható értékéhez:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\approx\; \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N}{N} \;\approx\; \text{E}(\,Y\,) \approx \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \;\text{E}(\,X\,)$$

***** Precíz megfogalmazás:**

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ integrál értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül, ha

   - az integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\; f(x)\, dx < \infty$.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; \mathrm{E}(\,X\,)$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ integrál értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - az $\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, dx$ integrál konvergens, és
   - az $\int_{0}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ integrál divergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; +\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ integrál értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - az $\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, dx$ integrál divergens, és
   - az $\int_{0}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ integrál convergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; -\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

10.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket egy $t(x)$ függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1)\;,\; t(X_2)\;,\; \ldots, t(X_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \;\approx\; \mathrm{E}(\,t(X)\,)$$

Vázlatos bizonyítás: Vegyük fel a számegyenesen az x_i , $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ pontokat úgy, hogy szomszédos x_i, x_{i+1} pontok távolsága, amit Δx_i -szel jelölünk, kicsi legyen minden i-re. Az X valószínűségi változó megfigyelt értékét az $[x_i, x_{i+1})$ intervallumban kerekítsük le x_i-re, és a kapott értéket jelöljük Y-nal:

$$Y = x_i \quad \text{ha} \quad x_i \le X < x_{i+1}$$

Az Y diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei az x_i , $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ számok, és minden egyes i-re az x_i valószínűsége:

$$\mathrm{P}\,(\,t(Y) \;=\; t(x_i)) \;=\; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\; dx$$

$t(Y)$ várható értéke:

$$\mathrm{E}(\,t(Y)\,) = \sum_i \; t(x_i)\;\mathrm{P}\,(\,Y \;=\; x_i) \;=\sum_i \; t(x_i) \; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\; dx$$

Mivel Y értéke és X értéke csak kicsit tér el, $t(X)$ értéke is csak kicsit tér el $t(Y)$-tól, ezért a kísérleti eredmények átlagai is csak kicsit térnek el:

$$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \approx \frac{t(Y_1)+t(Y_2)+\ldots+t(Y_N)}{N}$$

Mivel Δx_i minden i-re kicsi, az alábbi közelítésekkel élhetünk:

$$\mathrm{P}(\, Y \;=\; x_i) \;=\; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \;\approx\; f(x_i)\cdot \Delta x_i \qquad\qquad (i=\ldots,-1,0,1,\ldots)$$

$$\mathrm{E}(\, t(Y)\,) = \sum_i \; t(x_i) \; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \;\approx\; \sum_i \; t(x_i)\; f(x_i)\cdot \Delta x_i \;\approx\; \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\; f(x)\; dx$$

Mindezt felhasználva kapjuk, hogy az X-re végzett kísérleti eredmények t-be való helyettesítésekor adódó értékeinek az átlaga közel van $t(X)$ várható értékéhez:

$$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \approx \frac{t(Y_1)+t(Y_2)+\ldots+t(Y_N)}{N} \approx \;\mathrm{E}(\, t(Y)\,) \approx \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\; f(x)\; dx = \;\mathrm{E}(\, t(X)\,)$$

***** Precíz megfogalmazás:**

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\, t(X)\,) = \sum_x t(x)\; p(x)$ sor értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül,
   - ha a sor véges sok tagból áll, azaz az X valószínűségi változónak csak véges sok lehetséges értéke van, vagy
   - végtelen sok tag esetén – ha a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_x |t(x)|\;\; p(x) < \infty$.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \;\to\; \mathrm{E}(\, t(X)\,)$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\, t(X)\,) = \sum_x t(x)\; p(x)$ sor értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha
   - pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0}\; x\; p(x)$ divergens, és
   - a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0}\; x\; p(x)$ konvergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \;\to\; +\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\, t(X)\,) = \sum_i t(x_i)\; p_i = \sum_i t(x)\; p(x)$ sor értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha
   - pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0}\; x\; p(x)$ kovergens, és
   - a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0}\; x\; p(x)$ divergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a
   $$\frac{t(X_1)+t(X_2)+\ldots+t(X_N)}{N} \;\to\; -\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

10.3. NSZT a második momentumra

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények második momentumára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X második momentumával egyenlő:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N} \approx \mathrm{E}(\, X^2 \,)$$

Bizonyítás: Ha az előző részben a $t(x) = x^2$ speciális függvényt vesszük akkor azonnal megkapjuk az állítást.

10.4. NSZT a varianciára

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N}$$

varianciájára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N} \approx \mathrm{VAR}(X)$$

Vázlatos bizonyítás: Ugyanis, ha az $\overline{X}_N$ átlag helyére az $\mathrm{E}(\, X\,)$ várható értéket írjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N} \approx$$

$$\approx \frac{(X_1 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + (X_2 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + \ldots + (X_N - \mathrm{E}(\, X\,))^2}{N}$$

A jobb oldalon álló átlag az $(X - \mathrm{E}(\, X\,))^2$ valószínűségi változó várható értékéhez van közel, ami éppen az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(X_1 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + (X_2 - \mathrm{E}(\, X\,))^2 + \ldots + (X_N - \mathrm{E}(\, X\,))^2}{N} \approx \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(\, X\,))^2\right) = \mathrm{VAR}(X)$$

10.5. NSZT a szórásra

Így aztán nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények szórása – igen általános feltételek mellett – körülbelül az X szórásával egyenlő:

$$\sqrt{\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N}} \approx \mathrm{SD}(X)$$

11. Random számok transzformációi

11.1. Néhány konkrét transzformáció

1. Példa: Random szám négyzete

$$X = \mathrm{RND}^2$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \sqrt{x} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

Tehát egy $[a;b]$ intervallum valószínűsége:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \sqrt{b} - \sqrt{a} \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

A képletek meghatározása: RND^2 lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}^2 \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND} \le \sqrt{x)}\right) = \sqrt{x} \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

2. Példa: Random szám négyzetgyöke

$$X = \sqrt{\mathrm{RND}}$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = x^2 \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = 2x \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

Tehát egy $[a;b]$ intervallum valószínűsége:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = b^2 - a^2 \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b 2x\,dx \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

A képletek meghatározása: $\sqrt{\mathrm{RND}}$ lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \le x\right) = \mathrm{P}\left(\sqrt{\mathrm{RND}} \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND} \le \ x^2\right) = x^2 \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

3. Példa: Random szám reciproka

$$X = 1 \,/\, \text{RND}$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{ha} \quad 1 < x < \infty$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{ha} \quad 1 < x < \infty$$

Tehát egy $[a; b]$ intervallum valószínűsége:

$$\text{P}(a \le X \le b) = \left(1 - \frac{1}{b}\right) - \left(1 - \frac{1}{a}\right) \qquad \text{ha} \quad 1 \le a < b < \infty$$

$$\text{P}(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{ha} \quad 1 \le a < b < \infty$$

A képletek meghatározása: $1/\text{RND}$ lehetséges értékei az $(1, \infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $1 < x < \infty$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \text{P}\left(X \le x\right) = \text{P}\left(\frac{1}{\text{RND}} \le x\right) = \text{P}\left(\frac{1}{x} \le \text{RND}\right) = \text{P}\left(\text{RND} \ge \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} \qquad (x > 1)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \left(1 - x^{-1}\right)' = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad (x > 1)$$

*** **4. Példa: Random számok szorzata**

$$X = \text{RND}_1\ \text{RND}_2$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = x - x \ln x \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = -\ln x \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

Tehát egy $[a; b]$ intervallum valószínűsége:

$$\text{P}(a \le X \le b) = (b - b \ln b) - (a - a \ln a) \quad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

$$\text{P}(a \le X \le b) = \int_a^b (-\ln x)\ dx \quad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

A képletek meghatározása: $\text{RND}_1\ \text{RND}_2$ lehetséges értékei a $(0, 1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < 1$.

Eloszlásfüggvény: Mivel a $(\text{RND}_1, \text{RND}_2)$ véletlen pont az egységnégyzeten egyenletes eloszlást követ, egy vele kapcsolatos esemény valószínűsége területek hányadosaként számítható: az eseménynek megfelelő területet kell osztani a négyzet területével. A négyzet területe egyenlő 1-gyel, ezért az osztástól el is lehet tekinteni. A $\{\text{RND}_1\ \text{RND}_2 \le x\}$ esemény két egymást kiáró esemény úniója:

$$\{\text{RND}_1\ \text{RND}_2 \le x\}\} =$$

$$\{\text{RND}_1 \le x\} \cup \{x < \text{RND}_1 \ \text{ és } \ \text{RND}_1\ \text{RND}_2 \le x\}$$

Így azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \text{P}\left(X \le x\right) = \text{P}\left(\text{RND}_1\ \text{RND}_2 \le x\right) =$$

$$\text{P}\left(\text{RND}_1 \le x\right) + \text{P}\left(x < \text{RND}_1 \ \text{ és } \ \text{RND}_1\ \text{RND}_2 \le x\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_1 \le x\right) + \mathrm{P}\left(x \le \mathrm{RND}_1 \text{ és } \mathrm{RND}_2 \le x/\mathrm{RND}_1\right) =$$

Az első tag x-szel egyenlő. A második pedig

$$\text{az } \{(u,v): \ \ x \le u \le 1 \text{ és } 0 \le v \le x/u\} \text{ halmaz területe } =$$

$$\int_{u=x}^{u=1} \left(\int_{v=0}^{v=x/u} 1 \, dv \right) du = \int_{u=x}^{u=1} x/u \ \ du = -x \ln x$$

A két tag összege éppen $F(x) - t$ adja.

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = (x - x \ln x)' = 1 - \ln x - x \, \frac{1}{x} = -\ln x \qquad (0 < x < 1)$$

*** **5. Példa: Random számok hányadosa**

$$X = \mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{ha } \ 0 < x < 1 \\ \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{ha } \ x > 1 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } \ 0 < x < 1 \\ \\ \frac{1}{2x^2} & \text{ha } \ x > 1 \end{cases}$$

A képletek meghatározása: $\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1$ lehetséges értékei a $(0, \infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < \infty$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1 \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2 \le x \ \mathrm{RND}_1\right)$$

Két esetet kell most szétválasztanunk:

1. eset: $x \le 1$

$x \le 1$ esetén ez a valószínűség az alábbi halmaz területével egyenlő:

$$\{(u,v): \ \ 0 \le u \le 1, \ \ 0 \le v \le 1 \ \text{ és } \ 0 \le \frac{v}{u} \le x\}$$

azaz

$$\{(u,v): \ \ 0 \le u \le 1, \ \ 0 \le v \le 1 \ \text{ és } \ 0 \le v \le \ x \, u\}$$

Ez a halmaz nem más, mint egy háromszög az alábbi csúcsokkal $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,x)$, így a területe $x/2$. Ezért

$$F(x) = x/2$$

2. eset: $x > 1$

$x > 1$ esetén érdemes a komplementer eseménnyel dolgozni:

$$1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1 \ge x\ \right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2 \ge x \ \mathrm{RND}_1\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2/x \ge \ \mathrm{RND}_1\right) =$$

$$= 1 - \text{az } \{(u,v): \ \ 0 \le u \le 1, \ \ 0 \le v \le 1 \ \text{ és } \ u \le v/x\} \text{ halmaz területe}$$

Az itt fellépő halmaz egy háromszög a $(0,0)$, $(0,1)$, $(1/x, 1)$ csúcsokkal, aminek területe $1/(2x)$. Ezért

$$F(x) = 1/(2x)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (\frac{x}{2})' = \frac{1}{2} & \text{ha } \ 0 < x < 1 \\ \\ (1 - \frac{1}{2x})' = \frac{1}{2x^2} & \text{ha } \ x > 1 \end{cases}$$

11.2. *** Béta eloszlás

Válasszunk egy n számot, majd pedig egy k számot úgy, hogy $1 \le k \le$ teljesüljön. Ezek után tekintsünk n darab egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X-szel a nagyság szerinti k-ik legkisebbet. Memutatjuk, hogy X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad \text{if} \quad 0 < x < 1$$

Megjegyzés: A béta eloszlásokat tetszőleges n-re és k-ra vezettük be. A kezdő számára ez így ijesztő lehet. Ennek

kivédésére tanácsoljuk, hogy - fáradságot és időt nem kímélve - először néhány speciális esetre gondolja át a definíciót, végezzen kísérleteket, értse meg, hogy miről is van szó. Javasolt paraméter értékek:

- $n = 2, k = 2$
- $n = 2, k = 1$
- $n = 3, k = 3$
- $n = 3, k = 2$
- $n = 3, k = 1$
- $n = 10, k = 3$

A sűrűségfüggvény képletének levezetése: Válasszunk egy x pontot 0 és 1 között, és legyen az $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül. A sűrűség jelentése miatt:

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1}$$

A számlálóban álló $x_1 \le X \le x_2$ esemény azt jelenti, hogy a nagyság szerinti k-ik random szám az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba esik, vagyis

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ X\ ]$ intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ X\ ;\ 1\ ]$ intervallumba	

Mindez közelítőleg ezt jelenti:

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ x_2\ ;\ 1\ ]$ intervallumba	

Az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba eső random szám az n darab random szám akármelyike lehet. Ez ad n lehetőséget. A $[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba eső $k-1$ darab random szám az $n-1$ darab többi random szám közül kerül ki. Ez sokszorozza a lehetőségek számát $\binom{n-1}{k-1}$ -vel, vagyis a random számok elhelyezkedésével kapcsolatban a lehetőségek száma:

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Eme lehetőségek mindegyikének a valószínűsége

$$x_1^{k-1}\,(x_2 - x_1)\,(1-x_2)^{n-k}$$

Ezért a számlálóban álló valószínűség közelítőleg:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ x_1^{k-1}\,(x_2 - x_1)\,(1-x_2)^{n-k}$$

Ha ezt elosztjuk $(x_2 - x_1)$-vel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ x_1^{k-1}\,(1-x_2)^{n-k}$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy az $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ intervallum mindkét végpontja x -hez közeli, és ezért x_1 és x_2 helyett is x-t írunk, akkor a sűrűségfüggvényre kijön, hogy

$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad (0 < x < 1)$$

11.3. Monoton transzformációk

Legyen $y = t(x)$ egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növekedő függvény, melynek $x = t^{-1}(y)$-nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha egy random számot behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet t(RND) -vel szokás jelölni. Az Y, vagyis t(RND) eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$-nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$-nal.

1. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) = t^{-1}(y)$$

$$g(y) = \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} < t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \text{P}(Y < y) = \text{P}\left(\ t(\text{ RND}) < y\ \right) =$$

$$= \text{P}\left(\ \text{RND} < t^{-1}(y)\ \right) = t^{-1}(y)$$

y szerinti deriválással:

$$g(y) = \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Második bizonyítás. Legyenek x és y , illetve $x + \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y\ =\ t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y\ =\ t(\Delta x)$$

Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x < \text{RND} < x + \Delta x$$

eseménnyel. Ezért

$$\text{P}(y < Y < y + \Delta y) = \text{P}(x < \text{RND} < x + \Delta x)$$

Felhasználva, hogy

$$\text{P}(x < \text{RND} < x + \Delta x) = \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\text{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \frac{\text{P}(x < \text{RND} < x + \Delta x)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx \left(t^{-1}(y)\right)'$$

*** **2. Állítás:** Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) = 1 - t^{-1}(y)$$

$$g(y) = -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} > t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \text{P}(Y < y) = \text{P}\left(\ t(\text{ RND}) < y\ \right) =$$

$$= \text{P}\left(\ \text{RND} > t^{-1}(y)\ \right) = 1 - \text{P}\left(\ \text{RND} < t^{-1}(y)\ \right) = 1 - t^{-1}(y)$$

y szerinti deriválással:

$$g(y) = -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

Második bizonyítás. Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton csökenő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x - \Delta x < \text{RND} < x$$

eseménnyel, ahol x és y, illetve $x - \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \ = \ t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y \ = \ t(x - \Delta x)$$

Vegyük észre, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő mivolta miatt

$$\left(t^{-1}(y)\right)' \approx -\frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

Ezért

$$\text{P}(y < Y < y + \Delta y) = \text{P}(x - \Delta x < \text{RND} < x)$$

Felhasználva, hogy

$$\text{P}(x - \Delta x < \text{RND} < x) = \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\text{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \frac{\text{P}(x - \Delta x < \text{RND} < x)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} =\approx -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

11.4. Folytonos szimuláció

Tegyük fel, hogy megadnak egy folytonos eloszlást, és nekünk elő kell állítani számítógép segítségével egy olyan X valószínűségi változót, ami a megadott eloszlást követi. Egyenletes eloszlás esetén egyszerű a helyzet, hiszen a az Excelben angolul a `RAND()`, illetve magyarul a `VÉL()` utasítás olyan véletlen számot állít elő, ami a $[0;1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követi. Ezért

- ha a $[0;1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást adják meg, akkor a megoldás: $X = \text{RND}$
- ha az $[5;15]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást adják meg, akkor a megoldás : $X = 5 + 10 \cdot \text{RND}$
- ha az $[A;B]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást adják meg, akkor a megoldás : $X = A + (B - A) \cdot \text{RND}$

Ha a megadott eloszlás nem egyenletes, akkor a módszer nem ennyire egyszerű. A következőképpen lehet eljárni: *Meghatározzuk a megadott eloszlás $F(x)$ eloszlásfüggvényének az inverzét, majd az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:*

$$X = F^{-1}(\text{RND})$$

Az eljárás igazolásául az előző alfejezetben tárgyaltakra lehet hivatkozni, mely szerint ha egy RND számot egy szigorúan monoton növekedő transzformációnak vetünk alá, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a transzformációs függvény inverze. Ezért, ha a transzformáció a megadott eloszlásfüggvény inverzével történik, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a megadott eloszlásfüggvény lesz.

Megjegyzés: Az itt megadott módszer nem az egyetlen módszer, más módszerekkel is elő lehet állítani a kívánt eloszlást követő valószínűségi változót.

12. Nevezetes folytonos eloszlások

12.1. Exponenciális eloszlás

A λ paraméterű *exponenciális eloszlást* a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

A λ paraméterű exponenciális eloszlás eloszlás várható értéke is és szórása is $1/\lambda$.

Egy valószínűségi változóra, illetve folytonos eloszlásra azt mondjuk, hogy *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő:

$$\text{P}(\ X > s + t \mid X > t\ ) = \text{P}(\ X > s\ )$$

illetve

$$\text{P}(\ (\ s + t, \infty) \mid (\ t, \infty)\ ) = \text{P}(\ (\ s, \infty)\ )$$

minden $s, t \geq 0$ esetén.

Példa: Poharak élettartama. Ha például X egy bizonyos tárgy - mondjuk egy pohár - élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság *"az élettartamnak a múltra vonatkozó érzéketlenségét fejezi ki"*: ha egy pohár már valamennyi - mondjuk t ideig - élt (nem tört össze), akkor annak az esélye, hogy a pohár még további akármennyi - mondjuk s - ideig élni fog (nem törik össze) ugyanannyi, mint annak az esélye, hogy egy vadonatúj pohár legalább s ideig él (nem törik össze). Tehát egy élő pohár kora nem befolyásolja az ő életének a további esélyeit.

Állítás: Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

Bizonyítás:

1. Az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal:

Be akarjuk látni, hogy exponenciális eloszlás esetén fennáll az örökifjú tulajdonságot definiálló

$$\text{P}(X > s + t | X > t) = \text{P}(X > s)$$

összefüggés. Az egyenlőség baloldalán álló feltételes valószínűséget törtként írjuk fel:

$$\frac{\text{P}(X > s + t)}{\text{P}(\ X > t\ )} = \text{P}(\ X > s\ )$$

Ha az egyenletben a valószínűségeket mindhárom helyen átírjuk a $\text{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$ összefüggés alapján, akkor az igazolandó egyenlőség az alábbi egyenlsőségbe megy át:

$$\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Ez az egyenlőség pedig nyilván igaz, hiszen a baloldalon $e^{-\lambda t}$-val egyszerűsítve kiadódik a jobboldal.

2. Csak az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal:

A $\text{P}(X > x)$ valószínűséget jelöljük $T(x)$-szel. $T(x)$-szel kapcsolatban leszögezünk néhány egyszerű tényt:

- $T(x) = 1 - F(x)$, $\quad$ azaz $\qquad F(x) = 1 - T(x)$
- $T(x)$ csökkenő függvény
- $T'(0)$ értéke negatív

Legyen $\lambda = -T'(0)$, azaz $T'(0) = -\lambda$. A

$$\frac{\text{P}(X > s+t)}{\text{P}(\ X > t\ )} = \text{P}(\ X > s\ )$$

egyenletet így írhatjuk:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} = T(s)$$

Mindkét oldalon s szerint deriválva a

$$\frac{T'(s+t)}{T(t)} = T'(s)$$

egyenletet adódik. Ha most s helyére 0-t helyettesítünk, akkor a

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

differenciál egyenletet kapjuk. A differenciál egyenlet mindkét oldalát t szerint integálva ezt kapjuk:

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t + C$$

Mivel $T(0) = 1$, ezért $C = 0$. Így

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t$$

azaz

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

amiből kiadódik az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = 1 - T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Az exponenciális eloszlás alkalmazásai:

1. Élettartamok: Ha a valószínűségi változó valaminek az élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: ha egy adott pillanatban a szóbanforgó dolog „él”, akkor a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak. Amíg él, addig a múltja nincs hatása a jövőjére. Ameddig él, olyan, mint egy újszülött.

2. Várakozási idők: Bizonyos (eléggé általános, itt nem részlezendő) feltételek mellett a várakozási időkre is teljesül az örökífú tulajdonság. Ezért a várakozási időket is gyakran modellezzük exponenciális eloszlással.

Egy X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy *öregedik*, ha

$$\text{P}(\ X > s+t \mid X > t\ )\ <\ \text{P}(\ X > s\ )$$

teljesül rá minden $s, t \geq 0$ esetén.

Példa: Ilyen valószínűségi változóra egy elhasználódó alkatrész (például gumiabroncs) élettartama.

Hasonlóan azt mondhatjuk, hogy *fiatalodik*, amennyiben

$$\text{P}(\ X > s+t \mid X > t\ )\ >\ \text{P}(\ X > s\ )$$

minden $s, t \geq 0$ esetén.

Példa: egy elmaradott országban született csecsemő élettartama. Ahogy a sorozatos veszélyeken túljut, egyre nő a további életbenmaradásának az esélye.

Az Excelben az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az

`EXPON.DIST(` x ; λ ; `FALSE )`

képlet adja, az $F(x)$ eloszlásfüggvényt

`EXPON.DIST(` x ; λ ; `TRUE )`

függvény.

12.2. *** Exponenciális eloszlásról egyebek

1. Állítás: Ha egy pozitív értékű, folytonos X valószínűségi változóra teljesül, hogy az

$$\mathrm{E}(\, X \,-\, s \,|\, X \,\geq\, s \,)$$

feltételes várható érték nem függ s-től, akkor X exponenciális eloszlást követ.

Megjegyzés: Az örökifjú tulajdonságból nyilván következik az a tény, hogy a

$$\mathrm{E}(\, X \,-\, s \,|\, X \,\geq\, s \,)$$

feltételes várható érték nem függ s-től. Tehát a fentebb megfogalmazott örökifjú tulajdonságnál gyengébb feltételből fogjuk most levezetni az exponenciális eloszlást. A mostani állításunk többet mond, mint a korábbi, fentebbi, ezért örülni kell neki. És valóban örülni kell neki, mert a tételünkből például az derül ki, hogy *ha egy bizonyos fajta pohárral kapcsolatban csak annyit tudunk a tapasztalatok alapján, hogy a még élő poharak további élettartamának az átlaga lényegében sosem függ a poharak élettartamától, akkor az ilyen poharak élettartama exponenciális eloszlást követ.*

Bizonyítás: Az $\mathrm{E}(X - s|X \geq s$ feltételes várható értéket integrál alakban felírhatjuk:

$$\mathrm{E}(\, X - s \,|\, X \,\geq\, s \,) = \mathrm{E}(\, X \,|\, X \,\geq\, s \,) - \, s \,=\, \frac{\int\limits_s^\infty x f(x) dx}{\int\limits_s^\infty f(x) dx} \,-\, s$$

A feltételeink szerint ez a kifejezés egy s-től nem függő konstanssal egyenlő:

$$\frac{\int\limits_s^\infty x f(x) dx}{\int\limits_s^\infty f(x) dx} \,-\, s \,=\, c$$

Az egyenletet átrendezve ezt kapjuk:

$$\int\limits_s^\infty x f(x) dx = (\, c + \, s \,) \, \int\limits_s^\infty f(x) dx$$

s szerint deriválva mindkét oldalt, az alábbi egyenlet adódik:

$$-s\, f(s) \,=\, \int\limits_s^\infty f(x) dx \,+\, (\, c + \, s \,) \; (-f(s))$$

azaz

$$0 \,=\, \int\limits_s^\infty f(x) dx \,+\, c \; (-f(s))$$

A $T(x) \,=\, \int\limits_s^\infty f(x) dx$ képlettel bevezetett függvényre az egyenlet az alábbi differenciál egyenletet adja:

$$0 \,=\, T(x) \,+\, c\, T'(x)$$

Mivel a $T(0) = 1$ kezdeti feltétel is teljesül, a differenciál egyenlet megoldása:

$$T(s) \,=\, e^{-\frac{1}{c} s}$$

és így

$$F(s) = 1 - T(s) = 1 - e^{-\lambda s} \qquad (x > 0)$$

ahol $\lambda = \frac{1}{c}$.

2. Állítás: Ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és Y úgy adódik X-ből, hogy az X valós értéket egész értékekre

- lefelé kerekítjük, akkor Y pesszimista geometriai eloszlást követ.
- felfelé kerekítjük, akkor Y optimista geometriai eloszlást követ.

A geometriai eloszlás jogossága az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságából – remélhetőleg – az Olvasó számára sejthető, érezhető. A bizonyítás lépéseinek kigondolása és a számítások elvégzése is maradjon az Olvasó feladata.

12.3. Normális eloszlás

Ismert tényként fogadjuk el, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

A *standard normális eloszlást* a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

Az eloszlásfüggvény:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \quad (-\infty < x < \infty)$$

A megfelelő integrálok kiszámolásával adódik, hogy a standard normális eloszlás várható értéke 0, szórása 1.

Megjegyzés: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét és annak inverzét is jól és biztonságosan kell tudni használni! Az eloszlásfüggvény és az inverz értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Íme a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének egy egyszerű táblázata:

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.500	1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.9987
0.1	0.540	1.1	0.864	2.1	0.982	3.1	0.9990
0.2	0.579	1.2	0.885	2.2	0.986	3.2	0.9993
0.3	0.618	1.3	0.903	2.3	0.989	3.3	0.9995
0.4	0.655	1.4	0.919	2.4	0.992	3.4	0.9997
0.5	0.691	1.5	0.933	2.5	0.994	3.5	0.9998
0.6	0.726	1.6	0.945	2.6	0.995	3.6	0.9998
0.7	0.758	1.7	0.955	2.7	0.997	3.7	0.9999
0.8	0.788	1.8	0.964	2.8	0.997	3.8	0.9999
0.9	0.816	1.9	0.971	2.9	0.998	3.9	1.0000
1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.999	4.0	1.0000

A standard normális eloszlás szimmetriája: A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye – páros függvény léven – szimmetikus az origóra. Ezért a $(-\infty; -x]$ és az $[x; +\infty)$ intervallumok valószínűségi egyenlőek:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (x > 0)$$

Az előző táblázatban ezért nincsenek negatív argumentumok. Negatív argumentum esetén a Φ függvény értékei – például – így számolhatók ki:

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.841 = 0.159 \qquad (x > 0)$$

$$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.23 \qquad (x > 0)$$

Origóra szimmetrikus intervallumok: Gyakran van szükség arra, hogy origóra szimmetrikus intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$\Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - [1 - \Phi(x)] = 2\,\Phi(x) - 1 \qquad (x > 0)$$

Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan $[-x\,;\,x]$ intervallumot, melynek valószínűsége q . Ehhez a

$$2\,\Phi(x) - 1 = q$$

egyenletet kell megoldani, melynek megoldása

$$x = \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

A következő táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk standard normális eloszlással kapcsolatos számításokban:

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$\varphi(x)$	NORM.S.DIST(x ; FALSE)
Eloszlásfüggvény	$\Phi(x)$	NORM.S.DIST(x ; TRUE)
Eloszlásfüggvény inverze	$\Phi^{-1}(y)$	NORM.S.INV(y)

Bizonyos Excel verziókban

NORM.S.DIST helyett NORMSDIST
NORM.S.INV helyett NORMSINV

is írható.

Ha μ tetszőleges valós szám és σ tetszőleges pozitív szám, akkor a μ, σ *paraméterű normális eloszlást* a sűrűségfüggvényével definiáljuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Az μ, σ paraméterű normális eloszlás várható értéke μ, szórása pedig σ.

A standard és nem standard normális eloszlások kacsolata: Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, és X-et megszorozzuk σ-val, majd hozzáadunk μ-t, akkor μ, σ paraméterű normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk. Megfordítva is igaz: ha az Y valószínűségi változó μ, σ paraméterű normális eloszlást követ, és Y-ból kivonunk μ-t, majd pedig az eredményt elosztjuk σ-val, akkor standard normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk.

Tetszőleges normális eloszlás eloszlásfüggvényének valamilyen x helyen vett $F(x)$ értéke visszavezethető a standard normális eloszlás $\Phi(x)$ függvényre:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Az $\frac{x-\mu}{\sigma}$ értéket az x érték **standardizált értékének, standardizáltjának** nevezzük. Tehát az $F(x)$ értékét úgy számoljuk ki, hogy vesszük az x érték standardizáltját, és standardizált értéknél megnézzük a Φ táblázatában a megfelelő értéket.

Várható értékre szimmetrikus intervallumok: Gyakran van szükség arra, hogy a várható értékre szimmetrikus $(\mu - x\,\sigma\,;\,\mu + x\,\sigma)$ intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$F(\mu + x\,\sigma) - F(\mu - x\,\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + x\,\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - x\,\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\,\Phi(x) - 1$$

Jegyezzük meg, hogy

- $x = 1$ esetén $2\,\Phi(x) - 1 = 2\,(0.841) - 1 = 0.682 \approx 0.68 = 68\%$
- $x = 2$ esetén $2\,\Phi(x) - 1 = 2\,(0.977) - 1 = 0.954 \approx 0.95 = 95\%$

vagyis a

- $(\mu\ -\ 1\,\sigma\,;\ \mu\ +\ 1\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.68 = 68\%$
- $(\mu\ -\ 2\,\sigma\,;\ \mu\ +\ 2\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.95 = 95\%$

Ezért ezekre a szabályokra mint "1-szigma szabály", illetve "2-szigma-szabály" szokás hivatkozni. Nyilván 1-től és 2-től különböző z értékekre is meg lehet fogalmazni "z-szer szigma szabály"-okat, de ettől eltekintünk.

Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan $(\,\mu - x\,\sigma\,;\ \mu + x\,\sigma\,)$ intervallumot, melynek valószínűsége q . Ehhez is a

$$2\,\Phi(x) - 1 = q$$

egyenletet kell megoldani, melynek megoldása

$$x = \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

Lineáris transzformációk: Ha X normális eloszlású valószínűségi változó μ, σ paraméterekkel, a, b konstans számok, és X-et megszorozzuk a-val, majd hozzáadunk b-t:

$$Y\ =\ a\,X\ +\ b$$

akkor normális eloszlást követő Y valószínűségi változóhoz jutunk. Y várható értéke nyilván $a\mu + b$, szórása pedig $|a|\sigma$.

Normális eloszlások alkalmazásai:

1. Ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó összege, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel. (A tagok szórásainak az összeg szórásához képest kell kicsinek lennie.) Ezt a kissé pongyola, de jól használható kijelentést teljes pontossággal a *centrális határeloszlás tételek* támasztják alá. A centrális határeloszlás tételeket pontosabb tárgyalása meghaladja kereteinket, ezért azokat itt nem tárgyaljuk.
2. Ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis értékű* valószínűségi változó összege, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel, hiszen kis értékek esetén a szórás is kicsi.
3. Sokszor csak kényelmi okokból használjuk a normális eloszlásokat, mert – különösebb elméleti magyarázat nélkül! – azt gondoljuk, hogy a normális eloszlás jó közelítése az igazi eloszlásnak, és – mint látni fogjuk – normális eloszlásokkal – különösen többdimenziós problémák esetén – nagyon kényelmesen lehet dolgozni. (Ez a munkastílus nem szokatlan! Az egyenletes eloszlásokat is – különösen többdimenziós problémák esetén – gyakran csak kényelmi okokból részesítjük előnyben a nem egyenletesekkel szemben.)

A normális eloszlás paramétereit vagy elméleti úton lehet kigondolni, vagy kísérleti eredmények átlagával, illetve szórásával kell közelíteni. A paraméterek elméleti kigondolásához fontos, hogy tájékozottak legyünk a várható érték, a variancia és a szórás tulajdonságaival.

Megjegyzés: A normális eloszlások eloszlásfüggvényeit és azok inverzeit is jól és biztonságosan kell tudni használni! Az eloszlásfüggvény és az inverz függvény értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Az alábbi táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk normális eloszlásokkal kapcsolatos számításokban:

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$f(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `FALSE )`
Eloszlásfüggvény	$F(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `TRUE )`
Eloszlásfüggvény inverze	$F^{-1}(y)$	`NORM.INV(` y ; μ ; σ `)`

Bizonyos Excel verziókban

$$\texttt{NORM.DIST} \text{ helyett } \texttt{NORMDIST}$$
$$\texttt{NORM.INV} \text{ helyett } \texttt{NORMINV}$$

is írható.

Feladat: Deszkák hossza. Egy faüzemben deszkákat gyártanak, melyek hossza normális eloszlást követ 200 cm várható értékkel és – egyelőre – ismeretlen σ szórással. Tapasztalatból tudjuk, hogy a deszkák 75 % -ának a hossza 195 és 205 cm közé esik. Hány százalékot tesznek ki azok a deszkák, melyek hossza 190 és 210 cm közé esik?

Megoldás: Ha egy véletlenszerűen választott deszka hosszát X -szel jelöljük, akkor a feladat szövege alapján:

$$\mathrm{P}(195 < X < 205) = 0.75$$

Ez azt jelenti, hogy

$$F(205) - F(195) = 0.75$$

amiből néhány egyszerű lépéssel megkapjuk σ értékét:

$$\Phi\left(\frac{205-200}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{195-200}{\sigma}\right) = 0.75$$

$$\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{\sigma}\right) = 0.75$$

$$2\;\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 = 0.75$$

$$\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = \frac{1+0.75}{2} = 0.875$$

$$\frac{5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.875) = 1.15$$

$$\sigma = \frac{5}{1.15} = 4.35$$

Ezek után:

$$\mathrm{P}(190 < X < 210) = F(210) - F(190) = \Phi\left(\frac{210-200}{4.35}\right) - \Phi\left(\frac{190-200}{4.35}\right) = \Phi(2.30) - \Phi(-2.30) = 2\;\Phi(2.30) - 1 = 0.98$$

Tehát a deszkák kb. 98 % -ának a hossza esik 190 és 210 cm közé.

12.4. Binomiális eloszlás közelítése normálissal

Tekintsük az alábbi valószínűségi változókat:

- szabályos érmével 5-ször dobva a dobott fejek száma
- szabályos dobókockával 25-ször dobva a dobott hatosok száma
- független, azonos valószínűségű események kapcsán nézzük azt, hogy közülük hány következik be

Nyilvánvaló, hogy ezek a valószínűségi változók egyrészt mind binomiális eloszlást követnek, másrészt előállnak független valószínűségi változók összegeként. Ezért – a centrális határ eloszlás tételek miatt – nem meglepő a következő tétel:

Moivre-Laplace tétel. *Ha az n paraméter elég nagy, és a p paraméter se a 0-hoz se az 1-hez nincs túl közel, akkor az n-ed rendű, p paraméterű binomiális eloszlás közelíthető normális eloszlással. A normális eloszlás paramétereit úgy kell a binomiális eloszláshoz igazítani, hogy a várható értékeik és a szórásaik megegyezzenek, vagyis*

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

A gyakoriság eloszlása. *Ezért, ha egy esemény valószínűsége p, és az eseményre n kísérletet végzünk, akkor (a fentebb mondott feltételek mellett) az esemény X gyakorságának eloszlását normális eloszlással közelíthetjük.*

A valószínűségek számolásakor az intervallum megválálasztására is figyelmet kell fordítani! Excellel dolgozva – a diszkrét $[A; B]$ intervallum $\mathrm{P}(A \le X \le B)$ valószínűsége binomiális eloszlással:

$$\texttt{BINOMDIST}\,(B\ ;\ n\ ;\ p\ ;\ \texttt{TRUE}\,) - \texttt{BINOMDIST}\,(A-1\ ;\ n\ ;\ p\ ;\ \texttt{TRUE}\,)$$

Ámde normális eloszlás alkalmazása esetén a diszkrét $[A;B]$ intervallum helyett a folytonos $\left[A-\frac{1}{2};B+\frac{1}{2}\right]$ intervallumot kell venni, és a P$(A \leq X \leq B)$ valószínűség (közelítő) értéke:

$$\texttt{NORMDIST}\,(B+\tfrac{1}{2}\ ;\ \mu\ ;\ \sigma;\texttt{TRUE}\,) - \ \texttt{NORMDIST}\,(A-\tfrac{1}{2}\ ;\ \mu\ ;\ \sigma\ ;\ \texttt{TRUE})$$

Megjegyezzük, hogy ha n értéke legalább 25, és p értéke 0.1 és 0.9 közé esik, akkor már jó a közelítés.

A relatív gyakoriság eloszlása. *A fentieknek nyilvánvaló következménye, hogy ha egy esemény valószínűsége p, és az eseményre n kísérletet végzünk, akkor (a fentebb mondott feltételek mellett) az esemény relatív gyakorságának, vagyis az $\frac{X}{n}$ valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei*

$$\mu = p \qquad \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

A relatív gyakoriság és a valószínűség eltérésének eloszlása. *Következésképpen az esemény $\frac{X}{n}$ relatív gyakorsága és az esemény p valószínűsége eltérésének, vagyis az $\frac{X}{n} - p$ valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei*

$$\mu = 0 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

12.5. Hány kísérlet kell ahhoz, hogy ... ?

12.5.1. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal

Tekintsünk egy eseményt. Az esemény (általunk nem ismert) valószínűségét jelöljük p -vel. Vegyünk fel egy ε -nal jelölt hibahatárt is. Ha az eseményre több kísérletet végzünk, és kiszámítjuk az esemény relatív gyakoriságát, akkor a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való eltérése kisebb is lehet ε -nál és nagyobb is lehet ε -nál. Tehát van értelme arról beszélni, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való eltérése kisebb ε -nál.

Fontos tudni, hogy adott q (1- hez közeli) valószínűség érték esetén hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy ennek az események a valószínűsége legalább q legyen?

A kérdést megismétlejük tömörebben formában is: Hány kísérlet kell ahhoz, hogy egy adott esemény ismeretlen valszínűségét a relatív gyakoriság ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett?

A fentiek fényében a választ nem nehéz megadni, mert annak a valószínűségét, hogy az $\frac{X}{n}$ relatív gyakoriság a p valószínűséget ε -nál kisebb hibával közelíti, így fejezhetjük ki a normális eloszlás ϕ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \leq \frac{X}{n} - p \leq \varepsilon \right) =$$

$$= \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) - \phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) = 2\ \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) - 1$$

Következésképpen ahhoz, hogy a relatív gyakoriság a valószínűséget ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett, annak kell teljesülnie, hogy

$$2\ \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) - 1 \geq q$$

Ebből, az egyenlőtlenség egyszerű átrendezéseivel kapjuk, hogy

$$\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \geq \frac{1+q}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{p(1-p)}\ \frac{\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)}{\varepsilon}$$

$$n \geq\ p(1-p)\ \ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

Mivel a jobboldalon szereplő $p(1-p)$ tényező legfeljebb $\frac{1}{4}$ lehet, az

$$n \geq \frac{1}{4}\ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség élesebb a korábbinál.

Tehát *az*

$$n \geq \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{4\,\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség teljesülése esetén az $\frac{X}{n}$ *relatív gyakoriság a* p *valószínűséget* ε *-nál kisebb hibával közelíti legalább* q *biztonság mellett, azaz*

$$\mathrm{P}\left(\ \left|\ \frac{X}{n}-p\ \right|\ \leq \varepsilon\right)\ \ \geq\ \ q$$

A képletre támaszkodva egy táblázatot készítettünk, mely azt mutaja, hogy a táblézat bal oldalán megadott pontosság (ε) és a tetején megadott biztonság (q) teljesítéséhez hány kísérlet elvégzése elegendő:

$\varepsilon \setminus q$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.10	68	72	77	83	89	97	106	118	136	166
0.09	84	89	95	102	110	119	131	146	168	205
0.08	106	113	120	129	139	151	165	184	212	260
0.07	139	147	157	168	181	196	216	241	277	339
0.06	188	200	213	228	246	267	293	328	376	461
0.05	271	288	307	329	354	385	422	471	542	664
0.04	423	450	479	513	553	601	660	736	846	1 037
0.03	752	799	852	912	983	1 068	1 172	1 309	1 504	1 844
0.02	1 691	1 797	1 916	2 052	2 211	2 401	2 637	2 944	3 383	4 147
0.01	6 764	7 186	7 663	8 208	8 844	9 604	10 545	11 774	13 530	16 588

Érdemes a táblázat sorait és oszlopait kicsit tanulmányozni.

- Ha akármelyik soron vévigmegyünk, észrevehetjük, hogy a biztonság jelentősen nő (közeledik 1-hez), miközben a kísérletszám aránylag keveset nő: az utolsó elem kb. csak két és félszerese az elsőnek.
- Ha pedig akármelyik oszlopon megyünk végig, láthatjuk, hogy a pontosság javításához (ε csökkentéséhez) a kísérletszám jelentős növelésére van szükség: az utolsó elem kb. százszorosa az elsőnek.

Példa: A krumplis tészta népszerűsége Magyarországon. Ha valaki arra kíváncsi, hogy a magyar felnőttek hányad része szereti a krumplis tésztát, akkor elvileg megkérdezhetné az összes felnőttet, és a válaszok alapján a kérdezett arányt pontosan ki tudná számolni. Ez eléggé költséges és hosszú munka lenne! De ha megelégszünk azzal, hogy az igazi arányt 0.05 pontossággal közelítsük 0.95 biztonság mellett, akkor – a táblázatból látjuk – ehhez elég 385 véletlenszerűen választott embert megkérdezni, és a válaszokból a krumlis tésztát kedvelők relatív gyakoriságát kiszámolni.

12.5.2. Várható érték közelítése átlaggal

Egy valószínűségi változóra végzett kísérleti eredmények átlaga – sok kísérlet esetén – általában közel van a valószínűségi változó várható értékéhez. Kevés kísérlet esetén ez nem így van, gyakran adódhatnak jelentős eltérések is.

Természetes kérdés:

Hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy egy X valószínűségi változó várható értékét a kísérleti eredményekből adódó átlag egy adott ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett?

Így okoskodhatunk: Ha az X valószínűségi változó várható értéke μ és szórása σ, továbbá $X_1, X_2, \ldots, X_N$ jelöli az X-re végzett kísérleti eredményeket, akkor a kísérleti eredmények átlagának a μ-től való eltérése

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu$$

Tudjuk, hogy ennek a különbségnek a várható értéke 0, szórása pedig $\sigma/\sqrt{n}$. Azt is tudjuk, hogy – elég nagy n esetén – a centrális határeloszlás tétel miatt az átlag és ez a különbség is (közelítőleg) normális eloszlásúnak vehető. Ezért annak a valószínűségét, hogy az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu$$

különbség ε -nál kisebb – elég nagy n esetén – közelítőleg így fejezhető ki a normális eloszlás ϕ eloszlásfüggvényének és a σ szórásnak segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \right| \le \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \le \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \le \varepsilon \right) =$$

$$\approx \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - \phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 2\ \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - 1 = 2\ \phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma} \right) - 1$$

Ebből látjuk, hogy *ha*

$$2\ \phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma} \right) - 1 \ge q$$

egyenlőtlenség fennáll, vagyis

$$n \ge \sigma^2 \ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

akkor az átlag legalább q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelíti a várható értéket.

1. Megjegyzés: Ha az X valószínűségi változó normális eloszlást követ, akkor a kísérleti eredmények átlaga normális eloszlást követ. Ebben az esetben nem kell a centrális határeloszlás tételre sem hivatkozni a fenti számolásban, és a kísérletek számának sem kell nagynak lenni, a kísérletek száma akármilyen kicsi is lehet.

2. Megjegyzés: A korábban levezetett

$$n \ge p(1-p) \ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képlet speciális esete a most levezetett

$$n \ge \sigma^2 \ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

általánosabb képletnek, hiszen egy esemény relatív gyakorisága nem más, mint az eseményre végzett kísérletek kapcsolódó indikátor változók átlaga, és – mint tudjuk – egy p valószínűségű esemény indikátor változójának a szórása $\sqrt{p(1-p)}$, szórásnégyzete (varianciája) $p(1-p)$.

Példa: Hány kilós az "egy kilós" kenyér? Senki sem gondolja, hogy minden "egy kilós" kenyér tömege pontosan 1 kg. De vajon az összes "egy kilós" kenyér tömegének átlaga mennyi? Ha az összes "egy kilós" kenyeret megmérnénk, pontosan válaszolhatnánk a kérdésre. Ámde az összes kenyeret megmérni gyakorlatilag megvalósíthatalan.

Ezért meg kell elégednünk azzal, hogy a kérdéses átlagot – mondjuk – 0.95 biztonság mellett 0.05 kg-nál kisebb hibával közelítjük. Kérdés, hogy ehhez hány kenyeret kell lemérnünk?

A válasz – a fentiek fényében – egyszerű, ha ismerjük a kenyerek tömegének a σ szórását, vagy a szórásnak egy felső becslését. Tegyük fel, hogy – mondjuk – ez a felső becslés a szórásra 0.1 kg (mert 0.9 kg-nál kisebb vagy 1.1 kg-nál nagyobb tömegű "egy kilós" kenyér sosem bukkan fel a boltokban.) A szükséges kísérletek számát megadó

$$\sigma^2 \ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képletbe behelyettesítve a $q = 0.95$, $\varepsilon = 0.05$, $\sigma = 0.1$ értékeket 15.4 -et kapunk, ami azt jelenti, hogy legalább 0.95 a valószínűsége annak, hogy 16 darab kenyér tömegének az átlaga az összes kenyér tömegének az átlagát 0.05 kg pontosságnál kisebb hibával közelíti.

Ha a pontosságot növeljük, akkor a kísérletszám nő: ha a 0.05 kg-os hibahatár helyett a kisebb, 0.01 kg-os hibahatárt vesszük (a 0.95-ös biztonsági szint megtartása mellett), akkor 385 mérésre van szükség, ami léynegesen több 16-nál.

Ha biztonságot növeljük, akkor is nő a kísérletszám, de sokkal kisebb mértékben: ha 0.95 helyett 0.99 biztonsággal akarunk közelíteni (a 0.05 kg-os hibahatár megtartása mellett), akkor ehhez csak 27 mérésre van szükség, ami a 16-nál nem sokkal több.

13. *** Folytonos eloszlások transzformációi

Tekintsünk egy X folytonos valószínűségi változót. Az eloszlásfüggvényét jelöljük $F(x)$-szel, sűrűségfüggvényét $X(x)$-szel. Legyen $y = t(x)$ egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton függvény, melynek $x = t^{-1}(y)$-nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha az X valószínűségi változót behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet $t(\mathrm{X})$ -szel szokás jelölni. Az Y, vagyis $t(\mathrm{X})$ eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$-nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$-nal.

13.1. Növekedő transzformációk

1. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) \ = \ F\left(t^{-1}(y)\right)$$

$$g(y) \ = \ f\left(t^{-1}(y)\right) \ \cdot \ \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(X) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X < t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}\left(\ t(X) < y\ \right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\ X < t^{-1}(y)\ \right) = F\left(\ t^{-1}(y)\ \right)$$

y szerinti deriválással:

$$g(y) = f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'$$

Második bizonyítás. Legyenek x és y , illetve $x + \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \ = \ t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y \ = \ t(\Delta x)$$

Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x < X < x + \Delta x$$

eseménnyel. Ezért

$$\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y) = \mathrm{P}(x < X < x + \Delta x)$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(x < X < x + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \frac{\mathrm{P}(x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} \approx \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta y} = f(x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx f\left(\ t^{-1}(y)\ \right) \cdot \left(\ t^{-1}(y)\ \right)'$$

13.2. Csökkedő transzformációk

2. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) = 1 - F\left(t^{-1}(y)\right)$$

$$g(y) = -f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(X) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X > t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}\left(\ t(X) < y\ \right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\ X > t^{-1}(y)\ \right) = 1 - \mathrm{P}\left(\ X < t^{-1}(y)\ \right) = 1 - F\left(t^{-1}(y)\right)$$

y szerinti deriválással:

$$g(y) = -f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Második bizonyítás. Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton csökenő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x - \Delta x < X < x$$

eseménnyel, ahol x és y, illetve $x - \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \ = \ t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y \ = \ t(x - \Delta x)$$

Ezért

$$\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y) = \mathrm{P}(x - \Delta x < X < x)$$

Vegyük észre, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő mivolta miatt

$$\left(t^{-1}(y)\right)' \approx -\frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(x - \Delta x < X < x) = f(x) \cdot \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \frac{\mathrm{P}(x - \Delta x < X < x)}{\Delta y} \approx \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta y} = f(x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = f(t^{-1}(y)) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -f(t^{-1}(y)) \cdot \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Megjegyzés. A szigorúan monoton növekedő, illetve a szigorúan monoton csökkenő esetekről szóló sűrűségfüggvény transzformációs két képlet nyilván – az alábbi módon – egy képlettal is megadható:

$$g(y) = \left| f\left(t^{-1}(y)\right) \right| \ \cdot \ \left(t^{-1}(y)\right)'$$

14. *** Kovariancia

14.1. Kovariancia adatrendszerekkel kapcsolatban

Ide jöhet

14.2. Kovariancia valószínűségi változókkal kapcsolatban

1. Az X és az Y valószínűségi változók centralizáltjai szorzatának a várható értékét **kovarianciá**nak nevezzük:

$$\text{COV}(X;Y) = \text{E}\left(\, [X - \text{E}(X)\,]\,[Y - \text{E}(Y)\,]\, \right)$$

Könnyű belátni, hogy

$$\text{COV}(X;Y) = \text{E}(X\;Y) - \text{E}(X)\;\text{E}(Y)$$

2. *Egy valószínűségi változó önmagával vett kovarianciája a valószínűségi változó varianciájával egyenlő:*

$$\text{COV}(X;X) = \text{VAR}(X)$$

3. *A kovariancia szimmetria tulajdonsága:*

$$\text{COV}(Y;X) = \text{COV}(X;Y)$$

4. *Független valószínűségi változók kovarianciája* 0*-val egyenlő:*
Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor

$$\text{COV}(X;Y) = 0$$

14.3. *** A kovariancia további tulajdonságai

1. *A kovariancia linearitási tulajdonsága:*

   - Két tagra:

$$\text{COV}(\;a\;X + b\;Y\;;\;Z) = a\;\text{COV}(X;\;Z) + b\;\text{COV}(Y;\;Z)$$

   - Több tagra:

$$\text{COV}(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n;Y) = a_1\;\text{COV}(X_1;Y) + a_2\;\text{COV}(X_2;Y) + \ldots + a_n\;\text{COV}(X_n;Y)$$

2. *A kovarianciája abszolút értéke mindig kisebb vagy egyenlő, mint a szórások szorzata:*

$$|\text{COV}(X;Y)| \le \text{SD}(X)\;\text{SD}(Y)$$

3. *Független valószínűségi változók között a kovariancia 0:*

$$\text{COV}(X;Y) = 0$$

4. *Egymástól független vektorváltozók összegének koordinátái közötti kovarianciája egyenlő a tagok koordinátái közötti kovarianciák összegével:*

   - Két tagra:
Ha az $(X_1;Y_1),\;(X_2;Y_2)$ véletlen vektorok függetlenek egymástól, és

$$(X,Y) = (X_1;Y_1) + (X_2;Y_2)$$

akkor

$$\text{COV}(X;Y) = \text{COV}(X_1;Y_1) + \text{COV}(X_2;Y_2)$$

- Több tagra:
  Ha az $(X_1; Y_1), \ldots\ (X_n; Y_n)$ véletlen vektorok függetlenek egymástól, és

$$(X, Y) = (X_1; Y_1) + \ldots + (X_n; Y_n)$$

  akkor

$$\text{COV}(X; Y) = \text{COV}(X_1; Y_1) + \ldots + \text{COV}(X_n; Y_n)$$

Megjegyzés: A feltételben nem az X_1 független Y_1-tól, illetve X_2 független Y_2-től, hanem az $(X_1; Y_1)$ vektor független az $(X_2; Y_2)$ vektortól.

5. *Független vektor valószínűségi változók összegének koordinátái közötti kovarianciája, amikor a tagok koordinátái közötti kovarianciák azonosak:* Ha az $(X_1; Y_1), \ldots\ (X_n; Y_n)$ véletlen vektorok függetlenek egymástól, és mindegyik tag esetében a koordiánáták közötti kovariancia azonos, azaz

$$\text{COV}(X_i; Y_i) = c \quad \text{minden } i\text{-re}$$

   és

$$(X, Y) = (X_1; Y_1) + \ldots + (X_n; Y_n)$$

   akkor az összeg koordiánáti közötti kovariancia $(c\ n)$ -nel egyenlő:

$$\text{COV}(X; Y) = c\ n$$

14.4. *** A korrelációs együttható fogalma és legfontosabb tulajdonságai

1. Az X és az Y valószínűségi változók standardizáltjai szorzatának a várható értékét **korreléciós együtthatójának**nak nevezzük:

$$\text{CORR}(X; Y) = \text{E}\left(\frac{X - \text{E}(X)}{\text{SD}(X)} \frac{Y - \text{E}(Y)}{\text{SD}(Y)} \right)$$

2. *A korrelációs együttható abszlút értéke mindig kisebb vagy egyenlő, mint 1:*

$$|\text{CORR}(X; Y)| \leq 1$$

3. *Evalószínűségi változónak bármely lineáris transzormáltjával vett korrelációs együtthatója* 1*-gyel egyenlő:*

$$\text{CORR}(X; aX + b) = 1$$

4. *Ha X és Y között a korreláció 1, akkor vannak olyan a és b konstansok, hogy*

$$Y = aX + b \quad \text{fennáll 1 valószínűséggel, azaz} \quad \text{P}(Y = aX + b) = 0$$

   vagyis az X és Y véletlen értékek között detrminisztikus lineáris kapcsolat áll fenn.

5. *Független valószínűségi változók között a korreláció 0:*

$$\text{CORR}(X; Y) = 0$$

6. *Összeg varianciája:*

$$\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) + 2\ \text{COV}(X; Y)$$

14.5. *** A kovariancia-mátrix fogalma és tulajdonságai

1. Az $(X;Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó **kovariancia mátrix**ának definíciója:

$$C = \begin{pmatrix} \text{COV}(X;X) & \text{COV}(X;Y) \\ \\ \text{COV}(Y;X) & \text{COV}(Y;Y) \end{pmatrix}$$

azaz

$$C = \begin{pmatrix} \text{VAR}(X) & \text{COV}(X;Y) \\ \\ \text{COV}(X;Y) & \text{VAR}(Y) \end{pmatrix}$$

A kovariancia mátrix a varaiancia fogalmának általánosítása kétdimenzióra.

2. *Várható érték vektor és kovariancia mátrix transzformálódása lineáris transzofrmáció esetén:*

Ha az **x**-síkról egy kétdimenziós eloszlást az

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}\ +\ \mathbf{b}$$

lineáris transzformációval az **u**-síkra képezünk, akkor a kapott új eloszlás várható érték vektora a régi $\mathbf{m}_{\text{régi}}$ várható érték vektor lineáris transzformáltja:

$$\mathbf{m}_{\text{új}} = \mathbf{A}\ \mathbf{m}_{\text{régi}}\ +\ \mathbf{b}$$

Ha a régi eloszlás kovariancia mátrixa $\mathbf{C}_{\text{régi}}$, akkor a transzformációval kapott új eloszlás kovariancia mátrixa

$$\mathbf{C}_{\text{új}} = \mathbf{A}\ \mathbf{C}_{\text{régi}}\ \mathbf{A}^T$$

3. *Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa:* Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa egyenlő a tagok kovariancia mátrixainak összegével.

4. *Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa, amikor a tagok kovariancia mátrixai azonosak:* Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa, amikor a tagok kovariancia mátrixai azonosak, egyenlő a tagok közös kovariancia mátrixa szorozva a tagok számával.

14.6. *** Polinomiális eloszlás közelítése normális eloszlással

Ha az n paraméter elég nagy, és a p_1, p_2 paraméterek se a 0-hoz se az 1-hez nincsenek túl közel, akkor a síkon vett n-ed rendű, (p_1, p_2) paraméterű polinomiális eloszlás közelíthető kétdimenziós normális eloszlással. A normális eloszlás paramétereit a polinomiális eloszlás paramétereihez úgy kell hozzáigazítani, hogy a megfelelő paraméterek (várható értékek, szórások, korrelációs együttható) megegyezzenek, vagyis

$$\mu_1 = np_1 \qquad \mu_2 = np_2 \qquad \sigma_1 = \sqrt{np_1(1-p_1)} \qquad \sigma_2 = \sqrt{np_2(1-p_2)} \qquad r = -\sqrt{\frac{p_1}{(1-p_1)}\ \frac{p_2}{(1-p_2)}}$$