# Képletgyűjtemény Matematika EP1 vizsgára

## Nevezetes sorozathatárértékek

| | |
|---|---|
| $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ | ha $\lvert q\rvert < 1$ |
| $\lim_{n\to\infty} q^n n^k = 0$ | ha $\lvert q\rvert < 1$ és $k \in \mathbb{N}$ |
| $n^k \ll e^n \ll n! \ll n^n$ | amint $n \to \infty$ ha $k \in \mathbb{N}$ |

ahol $a_n \ll b_n$ azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

## Nevezetes függvényhatárértékek

| | |
|---|---|
| $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ |
| $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ | $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ | ha $a > 0$ és $a \neq 1$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ | ha $a > 0$ és $a \neq 1$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$ | ahol $\mu \in \mathbb{R}$ |

---

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$, $\quad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$

## Deriváltak

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(a^x)' = a^x \ln(a)$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\operatorname{arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arc} \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{ar} \sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{ar} \cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{ar} \tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\operatorname{ar} \coth x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\operatorname{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arc} \cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

## Differenciálási szabályok

$(cu)' = cu'$ $\quad$ ($c$ konstans)

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

## Integrálási szabályok

$\int cf \,\mathrm{d}x = c \int f \,\mathrm{d}x$ $\quad$ ($c$ konstans)

$\int (f+g) \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x + \int g \,\mathrm{d}x$

$\int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$

ahol $F$ az $f$ primitív függvénye

$\int f(g(x)) g'(x) \,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c$

ahol $F$ az $f$ primitív függvénye

$\int f^\alpha f' \,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ha $\alpha \neq -1$

$\int \frac{f'}{f} \,\mathrm{d}x = \ln \lvert f\rvert + c$

$\int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x$

## Nevezetes helyettesítések

| | |
|---|---|
| $R(\mathrm{e}^x)$ | $\mathrm{e}^x = t$ |
| $R(\sqrt{ax+b})$ | $\sqrt{ax+b} = t$ |
| $R\left(\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}\right)$ | $\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}} = t$ |
| $R(\sin x, \cos x)$ | $\sin x, \cos x, \tan x, \tan \frac{x}{2} = t$ |
| $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ | $x = a \sin t,\ x = a \cos t$ |
| $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ | $x = a \sinh t$ |
| $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ | $x = a \cosh t$ |

## Integrálok

$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\quad$ $(\alpha \neq -1)$

$\int \mathrm{e}^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} + c$

$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$

$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + c$

$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln \lvert x\rvert + c$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{ar} \sinh \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{ar} \cosh \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ar} \tanh \frac{x}{a} + c$, $\quad$ ha $\left\lvert \frac{x}{a} \right\rvert < 1$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ar} \coth \frac{x}{a} + c$, $\quad$ ha $\left\lvert \frac{x}{a} \right\rvert > 1$

$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln \lvert \cos x\rvert + c$

$\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln \lvert \sin x\rvert + c$

## Integrálás alkalmazásai

Terület: $T = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$

Síkgörbe ívhossza: $s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2(\varphi)+\left(\frac{\mathrm{d}r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\varphi$

Forgástest térfogata: $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$

Forgástest felszíne: $A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

Síkidom súlypontjának koordinátái: $x_s = \frac{\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$, $y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

---

**Vektortér** ($V$ vektortér, ha minden $\underline{u},\underline{v},\underline{w}\in V$ és $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ esetén teljesülnek az alábbiak)

| | |
|---|---|
| $\underline{u}+\underline{v}\in V$ | $\lambda\underline{u}\in V$ |
| $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$ | $(\lambda\mu)\underline{u}=\lambda(\mu\underline{u})$ |
| $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$ | $1\in\mathbb{R}$-re $1\underline{u}=\underline{u}$ |
| létezik $\underline{0}\in V$, hogy $\underline{u}+\underline{0}=\underline{u}$ | $(\lambda+\mu)\underline{u}=\lambda\underline{u}+\mu\underline{u}$ |
| minden $\underline{u}\in V$-hez létezik $-\underline{u}\in V$, hogy $\underline{u}+(-\underline{u})=\underline{0}$ | $\lambda(\underline{u}+\underline{v})=\lambda\underline{u}+\lambda\underline{v}$ |

## Determináns

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}|$$

ahol $|A_{ij}|$ az $a_{ij}$ elem sorának és oszlopának elhagyásával kapott aldetermináns.

Az $\underline{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok vektoriális szorzata $\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ -a_1b_3+a_3b_1 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}$.

Az $\underline{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\underline{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ és $\underline{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok vegyesszorzata $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}=(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

## Mátrix inverze

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)} \qquad \text{ahol } \mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & \dots & (-1)^{1+n}|A_{1n}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & \dots & (-1)^{2+n}|A_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|A_{n1}| & (-1)^{n+2}|A_{n2}| & \dots & (-1)^{2n}|A_{nn}| \end{bmatrix}^T$$

## Koordinátageometria

A $\underline{v}$ vektor felbontása az $\underline{u}$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre:

$\underline{v}=\underline{v}_p+\underline{v}_m$, ahol $\underline{v}_p||\underline{u}$ és $\underline{v}_m\perp\underline{u}$, akkor $\underline{v}_p=\frac{\langle\underline{v},\underline{u}\rangle}{\|\underline{u}\|^2}\underline{u}$ és $\underline{v}_m=\underline{v}-\frac{\langle\underline{v},\underline{u}\rangle}{\|\underline{u}\|^2}\underline{u}$.

Az $(x_1,y_1,z_1)$ és $(x_2,y_2,z_2)$ pontok távolsága $\mathbb{R}^3$-ben $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Az $(x_1,y_1,z_1)$ pont és az $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$ egyenletű sík előjeles távolsága $\frac{n_1(x_1-x_0)+n_2(y_1-y_0)+n_3(z_1-z_0)}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$.