

**Matematika EP1 vizsga, 2015. jan. 15.**

**I. rész: Számítási feladatok**

1. Számítsuk ki az

$$a_n = \frac{107 + 3n^2}{36 + n^2}$$

sorozat határértékét, és adjuk meg a  $\varepsilon = 1/100$  értékhez tartozó küszöbindexet.

2. Az  $y = \sqrt{x-1} + 2$  görbe  $x_0 = 5$  pontjához húzott érintőre ebben a pontban állított merőleges egyenes hol metszi a koordinátatengelyeket?

3. Barkács Bernát 2 mm-es lemezből kivág egy olyan síkidomot, amelyet a koordinátarendszerben a koordinátatengelyek és az  $y = \cos x$  görbe  $x = 0$  és  $x = \pi/2$  közé eső darabja határolnak. Határozzuk meg az alakzat súlypontjának koordinátáit. (Segítség: használjuk a képletgyűjtemény formuláit és azonosságait, különösen az  $y$  koordináta számlálójának kiszámításához.)

4. Adjuk meg annak az origón átmenő egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges az alábbi két egyenesre.

$$\begin{cases} x = 3s + 8 \\ y = 4 - 2s \\ z = -s - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 - 5t \\ y = 4 - 2t \\ z = 3t + 3 \end{cases}$$

5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az  $A^{-1}$  inverzmátrixot (ha létezik) és az  $A^{-1}\underline{\mathbf{b}}$  szorzatot.

**II. rész: Elméleti feladatok**

6. Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet. Használjuk fel a tételt a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

határérték kiszámításához.

7. Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény szigorúan monoton csökkenő és differenciálható az  $(a, b)$  intervallumon. Defináljuk ezt a két tulajdonságot. Igaz-e ekkor, hogy  $f'(x) < 0$  minden  $x \in (a, b)$  esetén? Ha igaz, indokoljuk, ha nem, adjunk ellenpéldát.

8. Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt. Hogyan kell az állítást módosítani, ha az

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx$$

integrált szeretnénk kiszámolni? Végezzük is el az integrálást.

9. Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert valamely  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$  valós együtthatókkal. Mivel minden egyenlet a jobb oldalán 0 áll, a Gauss-elimináció során nem juthatunk önellentmondó sorhoz. Hány megoldása lehet a fenti egyenletrendszernek? Ez az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

együtthatómátrix milyen tulajdonságán múlik?

10. Mit jelent az, hogy a  $V$  vektortérben a  $W$  részhalmoz egy altér? A háromdimenziós vektorok  $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  vektortérében alteret alkot-e a  $W_1 = \{(x, y, z) : x = 3y - 2z\}$  vektorhalmoz? És a  $W_2 = \{(x, y, z) : x = 3y - 2z + 4\}$  részhalmoz? A választ indokoljuk.

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.