

Matematika EP1 vizsga, 2015. jan. 26.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki a következő határértéket.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n - 8\sqrt{n}}{\sqrt{5n^2 + 9 \cdot 4^n}}$$

2. Tekintsük az $f(x) = 2/(x-4)^3$ függvény azon pontját vagy pontjait, ahol az érintő meredeksége -6 . Írjuk fel a ponton átmenő és az érintőre merőleges egyenes egyenletét.
3. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét.

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 3}{x^2 + 2x} dx$$

4. Adott $\underline{u}_1 = (1, -1, 1)$ és $\underline{u}_2 = (1, 1, 0)$ két egymásra merőleges vektor. Bontsuk fel a $\underline{v} = (3, 3, 3)$ vektort három vektor összegére úgy, hogy az egyik \underline{u}_1 -gyel, a másik \underline{u}_2 -vel párhuzamos, a harmadik pedig merőleges \underline{u}_1 -re és \underline{u}_2 -re is.

Segítség: bontsuk fel először \underline{v} -t \underline{u}_1 -gyel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, majd a merőleges összetevőt bontsuk tovább \underline{u}_2 szerint.

5. Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az AB, AC, BA, BC, CA, CB mátrixszorzatok közül azokat, amelyek értelmezettek. Számítsuk ki az A, B, C mátrixok inverzei közül azokat, amelyek léteznek.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Definiáljuk a következő tulajdonságokat: egy valós függvény egy pontban folytonos, balról folytonos, ill. jobbról folytonos. Mutassunk példát olyan függvényre, amely egy pontban balról folytonos, de jobbról nem folytonos. Mutassunk példát olyan függvényre, amely egy pontban se balról, se jobbról nem folytonos.
7. Mondjuk ki a Rolle-tételt. Melyik feltétel sérülése miatt nem alkalmazható a tétel az $f(x) = \tan x$ függvényre a $[0, \pi]$ intervallumon?
8. Hogyan értelmezzük az improprius integrált egy véges intervallumon, ha az integrandus nem korlátos az intervallum egyik végpontjának közelében? Ez alapján számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$$

9. Egy négyzetes mátrix determinánsa hogyan változik, ha egyik sorának egy valós számszorosát hozzáadjuk egy másik sorához? Az alábbi mátrix esetén mutassuk be, hogyan kell egy mátrix determinánsát valamelyik (tetszőleges) sora szerint kifejtteni. Ezek után számoljuk is ki a determinánst. A számítás során az első tulajdonság is felhasználható.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Mit jelent az, hogy egy vektortérben néhány vektor bázist alkot? Mit jelent a vektortér dimenziója? Adjunk meg egy bázist a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektorterében (ez a vektortér a $p(x) = ax^2 + bx + c$ alakú függvényekből áll, ahol a, b és c valós együtthatók). Mennyi a dimenziója ennek a vektortérnek?

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.