Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2015. jan. 26.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki a következő határértéket.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n - 8\sqrt{n}}{\sqrt{5n^2+9\cdot 4^n}}$$

Megoldás: A számlálóban és a nevezőben is 2^n-nel osztva (ami a gyökjel alá 4^n-ként vihető be), a határérték 1-nek adódik.

2. Tekintsük az $f(x) = 2/(x-4)^3$ függvény azon pontját vagy pontjait, ahol az érintő meredeksége -6. Írjuk fel a ponton átmenő és az érintőre merőleges egyenes egyenletét.

Megoldás: Az $f'(x) = -6/(x-4)^4 = -6$ egyenlet megoldásai $x = 3$ és $x = 5$. A keresett egyenes meredeksége $1/6$, a görbe pontjai $f(3) = -2$ és $f(5) = 2$. Így a keresett egyenesek egyenletei $y = (x-3)/6 - 2$ és $y = (x-5)/6 + 2$.

3. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét.

$$\int_1^2 \frac{x^3+3}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás: Az integrandusban polinomosztás és parciális törtekre bontás után

$$\int_1^2 \frac{x^3+3}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x - 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{5}{2}\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{2}\ln(x+2)\right]_1^2$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{5}{2}\ln 4 - \frac{5}{2}\ln 3$$

4. Adott $\underline{u}_1 = (1,-1,1)$ és $\underline{u}_2 = (1,1,0)$ két egymásra merőleges vektor. Bontsuk fel a $\underline{v} = (3,3,3)$ vektort három vektor összegére úgy, hogy az egyik $\underline{u}_1$-gyel, a másik $\underline{u}_2$-vel párhuzamos, a harmadik pedig merőleges $\underline{u}_1$-re és $\underline{u}_2$-re is.

Segítség: bontsuk fel először $\underline{v}$-t $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, majd a merőleges összetevőt bontsuk tovább $\underline{u}_2$ szerint.

Megoldás: Első lépésben a $(3,3,3) = (1,-1,1) + (2,4,2)$ felbontás adódik. Tovább bontva $(2,4,2) = 3(1,1,0) + (-1,1,2)$, azaz a keresett felbontás $(3,3,3) = (1,-1,1) + 3(1,1,0) + (-1,1,2)$.

5. Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az AB, AC, BA, BC, CA, CB mátrixszorzatok közül azokat, amelyek értelmezettek. Számítsuk ki az A, B, C mátrixok inverzei közül azokat, amelyek léteznek.

Megoldás: Az elvégezhető műveletek eredményei:

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 7 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad BC = B, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = C$$

II. rész: Elméleti feladatok

6. Definiáljuk a következő tulajdonságokat: egy valós függvény egy pontban folytonos, balról folytonos, ill. jobbról folytonos. Mutassunk példát olyan függvényre, amely egy pontban balról folytonos, de jobbról nem folytonos. Mutassunk példát olyan függvényre, amely egy pontban se balról, se jobbról nem folytonos.

Megoldás: Definíciókat ld. jegyzet. Balról folytonos, de jobbról nem a 0-ban a következő függvény: $f(x) = 0$ ha $x \le 0$ és $f(x) = 1$ ha $x > 0$. 0-ban se jobbról, se balról nem folytonos függvény: $g(x) = 0$ ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $f(0) = 1$.

7. Mondjuk ki a Rolle-tételt. Melyik feltétel sérülése miatt nem alkalmazható a tétel az $f(x) = \tan x$ függvényre a $[0,\pi]$ intervallumon?

Megoldás: Rolle-tételt ld. jegyzet. Az $f(x) = \tan x$ függvény nincs értelmezve az $x = \pi/2$ pontban, ezért a tétel nem alkalmazható.

8. Hogyan értelmezzük az improprius integrált egy véges intervallumon, ha az integrandus nem korlátos az intervallum egyik végpontjának közelében? Ez alapján számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$

Megoldás: Definíciót ld. jegyzet.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\varepsilon^{2/3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\right) = \infty$$

9. Egy négyzetes mátrix determinánsa hogyan változik, ha egyik sorának egy valós számszorosát hozzáadjuk egy másik sorához? Az alábbi mátrix esetén mutassuk be, hogyan kell egy mátrix determinánsát valamelyik (tetszőleges) sora szerint kifejteni. Ezek után számoljuk is ki a determinánst. A számítás során az első tulajdonság is felhasználható.

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&4&7&0\\3&7&9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Megoldás: A determináns nem változik egy sor valós számszorosának hozzáadásával. Az adott determinánst érdemes az utolsó sora szerint kifejteni. Ebből a második lépésben az első tulajdonságot használva (az első sor kétszeresét a másodikból kivonva és az első sor háromszorosát a harmadikból kivonva) kapjuk az alábbit.

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&4&7&0\\3&7&9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&7\\3&7&9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = -1$$

10. Mit jelent az, hogy egy vektortérben néhány vektor bázist alkot? Mit jelent a vektortér dimenziója? Adjunk meg egy bázist a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektorterében (ez a vektortér a $p(x) = ax^2 + bx + c$ alakú függvényekből áll, ahol a, b és c valós együtthatók). Mennyi a dimenziója ennek a vektortérnek?

Megoldás: Definíciókat ld. jegyzet. Az adott vektortér egy bázisát alkotják az $\{x^2, x, 1\}$ polinomok. Ezért a vektortér dimenziója 3.

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.