Matematika EP1, mintavizsga, 2014. tavasz

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{\ln(x)+x-1}$$

2. Írjuk fel az $f(x) = \sin(\arctan x)$ függvény $x_0 = 1$ helyen vett érintőjének egyenletét.

3. Mennyi az $f(x) = (x^2-1)/\sqrt{x^3-3x}$ függvény 2 és 3 közé eső darabja alatti terület?

4. Adjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= 3 \\ 3x + 4y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

5. Döntsük el, hogy a következő vektorok lineárisan függetlenek-e $\mathbb{R}^3$-ben.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6. Mennyi az $(1, 3, 5)$, $(2, 1, 1)$ és $(1, 0, -1)$ vektorok által feszített paralelepipedon térfogata?

II. rész: Elméleti feladatok

7. Igaz-e, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor monoton? Ha igaz, indokoljuk, ha nem igaz, mutassunk ellenpéldát.

8. Igaz-e, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik a határértéke az x_0 pontban, akkor az $f+g$ függvénynek is létezik a határértéke x_0-ban? Ha igaz, indokoljuk és adjuk meg a határértéket, ha nem igaz, mutassunk ellenpéldát.

9. Adjuk meg annak a definícióját, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 pontban deriválható.

10. Mondjuk ki a Newton–Leibniz-tételt.

11. Legyen A $k \times l$ méretű mátrix, B pedig $m \times n$ méretű mátrix. Milyen feltétel esetén értelmezett $A \cdot B$? Adjuk meg, hogyan számítjuk ki $A \cdot B$ elemeit.

12. A legfeljebb harmadfokú polinomok vektorterében alteret alkotnak-e azok a $p(x)$ legfeljebb harmadfokú polinomok, amelyeknek gyöke az 1, azaz amelyekre $p(1) = 0$? A választ indokoljuk.

Minden feladat 5 pontos. Az eredményes vizsgához mindkét részből külön-külön is legalább 9 pontot el kell érni.