Matematika EP1 vizsga megoldások, 2014. máj. 27.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az
$$a_n = \frac{5\sqrt{n}-2}{10\sqrt{n}+3}$$
sorozat határértékét és adjuk meg az $\varepsilon = 0{,}01$ értékhez tartozó küszöbindexet.

   Megoldás: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ és például 35^2 megfelel küszöbindexnek.

2. Mennyi az 1 sugarú gömbbe írt maximális térfogatú henger alapkörének sugara?

   Megoldás: alapkör sugara $\sqrt{\frac{2}{3}}$, magasság $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. $$\int_0^3 \frac{2x+10}{x^2+6x+5}\mathrm{d}x = ?$$

   Megoldás: $[2\log(x+1)]_0^3 = \log 16$.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét, ha létezik.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Megoldás:
$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 6 & 13 & -11 \\ -22 & 19 & 7 \\ 24 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Tekintsük az alábbi két egyenest a térben, amelyek metszik egymást.
$$\begin{cases} x(s) = 3+2s \\ y(s) = 10+5s \\ z(s) = 7-s \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 7-6t \\ y(t) = 2+3t \\ z(t) = 5+3t \end{cases}$$
Találjuk meg a két egyenes metszéspontját, azaz az s és t paraméterek azon értékét, amelyekre $(x(s), y(s), z(s))$ és $(x(t), y(t), z(t))$ a térnek ugyanaz a pontja. Határozzuk meg a két egyenes hajlásszögét ebben a pontban.

   Megoldás: $s = -1$, $t = 1$ és $(x, y, z) = (1, 5, 8)$. Irányvektorok skaláris szorzata $\langle (2, 5, -1), (-6, 3, 3)\rangle = 0$, ezért a szög $\pi/2$.

6. Bázist alkot-e $\mathbb{R}^3$-ben a következő három vektor?
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Megoldás: Igen, mert
$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 12 \neq 0.$$

II. rész: Elméleti feladatok

7. Mondjuk ki a számsorozat határértékére vonatkozó rendőrelvet.

   Megoldás: Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n$ is létezik és egyenlő A-val.

8. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény folytonos $[0,1]$-ben és differenciálható $(0,1)$-ben. Tudjuk továbbá, hogy $f'(x) > 0$ minden $x \in (0,1)$ esetén. Lehet-e ekkor $f(0) = f(1)$? A választ indokoljuk vagy adjunk példát. (Segítség: használjuk a Rolle-tételt.)

   Megoldás: Ha $f(0) = f(1)$ lenne, akkor a Rolle-tétel szerint lenne olyan $x_0 \in (0,1)$, ahol $f'(x_0) = 0$, ami ellentmondás, tehát nem lehet.

9. Legyen $f(x)$ kétszer differenciálható függvény az x_0 pontban. Adjunk meg az $f(x)$ függvény x_0-beli konvexitásához szükséges feltételt. Adjunk meg az $f(x)$ függvény x_0-beli konvexitásához elégséges feltételt.

   Megoldás: A konvexitás szükséges feltétele: $f''(x_0) \geq 0$, elégséges feltétele: $f''(x_0) > 0$.

10. Az
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$$
példán mutassuk be, hogyan értelmezzük végtelen intervallumon az improprius integrált.

    Megoldás:
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} \int_1^K \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} \left(-\frac{K^{-5}}{5} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5}.$$

11. Mutassuk meg, hogy a mátrixok szorzása nem kommutatív, azaz mutassunk olyan 2×2-es A és B mátrixokat, amelyekre $AB \neq BA$.

    Megoldás: Pl.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Adott három vektor $\mathbb{R}^3$-ben, amelyekről tudjuk, hogy *nem* lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor a három vektor bármelyike kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként? A választ indokoljuk vagy adjunk ellenpéldát.

    Megoldás: Nem, pl. $(1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0)$ lineárisan összefüggő, de $(0,1,0)$ nem fejezhető ki a többivel.

Minden feladat 5 pontos. Az eredményes vizsgához mindkét részből külön-külön is legalább 9 pontot el kell érni.