Matematika EP1 vizsga megoldása, 2014. jún. 3.

I. rész: Számítási feladatok

1. Határozzuk meg az

$$a_n = \left(\frac{3+n}{4+n}\right)^{n^2}$$

sorozat határértékét.

Megoldás:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{4+n}\right)^{n^2} \to 0.$$

2. Az a és b valós paraméterek mely értékére lesz az

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^2 \sin x} & \text{ha } 0 < x < \pi \\ bx & \text{ha } x \geq \pi \end{cases}$$

függvény folytonos?

Megoldás: Alkalmazva a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ azonosságot,

$$\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^2 \sin x} = 2\frac{\cos x - 1}{x^2},$$

aminek 0-beli határértéke -1, π-beli határértéke $-4/\pi^2$, ezért $a = -1$, $b = -4/\pi^3$.

3. Számítsuk ki az $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$ paraméteresen adott görbe $t_1 = 0$ és $t_2 = 1$ közé eső darabjának ívhosszát.

Megoldás: A paraméteres ívhosszképlet alapján az ívhossz a következő:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} \mathrm{d}t &= \int_0^1 \sqrt{2e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin^2 t} \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 e^t \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}(e-1). \end{aligned}$$

4. Adjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert összes megoldását.

$$\begin{aligned} x + 5y + 2z &= 11 \\ 2x + 8y + 3z &= 16 \\ -2x + y &= 5 \end{aligned}$$

Megoldás: $x = -2, y = 1, z = 4$ az egyetlen megoldás.

5. Mennyi a $(6, 2, -2)$ pont és a $3x - 6y + 2z = 9$ egyenletű sík távolsága?

Megoldás: A tanult képletbe behelyettesítve -1 adódik előjeles távolságnak.

6. Számítsuk ki az $(1, 2, 3)$ és $(-3, -2, -1)$ vektorok vektoriális szorzatát.

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

II. rész: Elméleti feladatok

7. Mit jelent az, hogy a t valós szám az a_n sorozat torlódási pontja? Mit mondhatunk még a_n-ről, ha korlátos és csak egy torlódási pontja van?

   Megoldás: Definíció: lásd jegyzet. Ha korlátos sorozatnak egy torlódási pontja van, akkor az a határértéke is.

8. Mit mond ki a L'Hospital-szabály? Indokoljuk meg, miért használható az alábbi esetben és számítsuk ki segítségével a következő határértéket.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

   Megoldás: L'Hospital-szabály: lásd jegyzet. Azért alkalmazható, mert $\lim_{x\to 0} e^x - 1 = \lim_{x\to 0} x = 0$, a keresett határérték $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$-gyel egyezik meg.

9. Írjuk fel a parciális integrálás képletét. Melyik deriválási szabályból következik és hogyan?

   Megoldás: Parciális integrálás: lásd jegyzet vagy képletgyűjtemény. A szorzat deriválási szabályából $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ adódik integrálással és átrendezéssel (amit le kell írni).

10. Mikor létezik egy $n \times m$-es mátrix inverze? Adjuk meg az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

    Megoldás: Akkor van inverz, ha $n = m$ és ha a mátrix determinánsa nem nulla.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

11. Hogyan változik egy 3×3-as mátrix determinánsa, ha minden elemét egy λ valós számmal megszorozzuk? A választ indokoljuk.

    Megoldás: A determináns λ^3-szorosára változik. Bármelyik determinánsszámítási mód esetén a λ^3 kiemelhető a kifejezés minden tagjából.

12. Alkothat-e generátorrendszert $\mathbb{R}^3$-ben két egymásra merőleges vektor? Ha igen, mutassunk példát, ha nem, indokoljunk.

    Megoldás: Két vektor a háromdimenziós $\mathbb{R}^3$ térben semmiképpen nem alkothat generátorrendszert, akár merőlegesek, akár nem, mert minden generátorrendszer elemszáma legalább a dimenzió.

Minden feladat 5 pontos. Az eredményes vizsgához mindkét részből külön-külön is legalább 9 pontot el kell érni.