Matematika EP1 vizsga megoldása, 2014. jún. 10.

I. rész: Számítási feladatok

1. Adjuk meg az alábbi sorozat határértékét:

$$a_n = \frac{3^n + (-1)^n n^3}{4^n + (-1)^n n^4}.$$

Megoldás: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

függvényt, hol van lokális minimuma vagy maximuma és inflexiós pontja.

Megoldás: $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, lokális minimum $x = -1$-ben, lokális maximum $x = 1$-ben, inflexiós pontok $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

3.

$$\int_0^1 \ln(2x+3)\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás: Parciális integrálással

$$\int_0^1 \ln(2x+3)\mathrm{d}x = \left[\frac{(2x+3)\ln(2x+3)}{2} - \frac{2x+3}{2}\right] = \frac{5\ln 5 - 3\ln 3}{2} - 1.$$

4. Határozzuk meg az $y = x^3$ és $x = 1$ görbék valamint az x-tengely által határolt korlátos tartomány súlypontjának koordinátáit.

Megoldás: $(\frac{4}{5}, \frac{2}{7})$.

5. Legyen p valós paraméter és tekintsük a

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$-beli vektorokat. Keressük meg p-nek azt az értékét, amelyre a fenti vektorok lineárisan összefüggők.

Megoldás: A vektorokból mint oszlopokból összeállított 3×3-as mátrix determinánsa $2p - 2$, ezért $p = 1$ esetén lesz a három vektor lineárisan összefüggő.

6. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 14 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

egyenesre és átmegy a $(2, 2, 2)$ ponton.

Megoldás: A sík normálvektora $(1, 2, 3)$, ezért egyenlete $x + 2y + 3z = 12$.

II. rész: Elméleti feladatok

7. Igaz-e, hogy konvergens sorozatnak mindig van korlátos részsorozata? A választ indokoljuk.

Megoldás: Konvergens sorozat mindig korlátos is (ld. jegyzet), ezért minden részsorozata is korlátos.

8. Hogyan értelmezzük az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli jobb ill. bal oldali differenciálhányadosát? Az x_0-beli jobb és bal oldali differenciálhányados létezése esetén milyen további feltételre van szükség ahhoz, hogy a függvény x_0-ban differenciálható legyen? Gondoljunk az $f(x) = |x|$ függvényre.

   Megoldás: Definíció ld. jegyzet. Az x_0-beli jobb és bal oldali differenciálhányados létezése esetén pontosan akkor differenciálható a függvény x_0-ban, ha a jobb és bal oldali differenciálhányados megegyezik. Az $f(x) = |x|$ a 0-ban nem differenciálható, létezik a jobb és bal oldali deriváltja, de azok nem egyeznek meg.

9. Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt.

   Megoldás: Ld. jegyzet.

10. Írjuk fel, hogyan lehet egy $n \times n$-es mátrix determinánsát az első sor szerint kifejteni és hogy az eredeti mátrixból hogyan kapjuk a kifejtésben megjelenő tagokat.

    Megoldás: Ld. jegyzet. Az is kell, hogy az aldeterminánsokat a megfelelő sor és oszlop elhagyásával kapott mátrixból számolhatjuk.

11. Mit jelent az, hogy egy vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek? Milyen összefüggés áll fenn egy lineárisan független vektorhalmaz elemszáma és a tér dimenziója között?

    Megoldás: Definíció ld. jegyzet. A lineárisan független vektorok száma legfeljebb annyi lehet, mint a tér dimenziója.

12. Egy lineáris egyenletrendszernek általában vagy nincs megoldása vagy egyértelmű megoldása van vagy végtelen sok megoldása van. Ezek közül melyik fordulhat elő, ha az egyenletrendszerről tudjuk, hogy kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlent?

    Megoldás: Az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha olyan sor szerepel benne, ami önmagában ellentmondás. Ez mindig előfordulhat az egyenletek és ismeretlenek számától függetlenül. Ha ilyen nincs, akkor végtelen sok megoldás van. Egyértelmű megoldás azért nem lehet, mert a vezéregyesek száma legfeljebb az egyenletek száma. Ez kisebb az ismeretlenek számánál, tehát nem juthat vezéregyes minden oszlopba.

Minden feladat 5 pontos. Az eredményes vizsgához mindkét részből külön-külön is legalább 9 pontot el kell érni.