Matematika EP1 vizsga, 2014. máj. 27.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az
$$a_n = \frac{5\sqrt{n}-2}{10\sqrt{n}+3}$$
sorozat határértékét és adjuk meg az $\varepsilon = 0{,}01$ értékhez tartozó küszöbindexet.

2. Mennyi az 1 sugarú gömbbe írt maximális térfogatú henger alapkörének sugara?

3. $$\int_0^3 \frac{2x+10}{x^2+6x+5}\mathrm{d}x = ?$$

4. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét, ha létezik.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Tekintsük az alábbi két egyenest a térben, amelyek metszik egymást.
$$\begin{cases} x(s) = 3+2s \\ y(s) = 10+5s \\ z(s) = 7-s \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 7-6t \\ y(t) = 2+3t \\ z(t) = 5+3t \end{cases}$$
Találjuk meg a két egyenes metszéspontját, azaz az s és t paraméterek azon értékét, amelyekre $(x(s), y(s), z(s))$ és $(x(t), y(t), z(t))$ a térnek ugyanaz a pontja. Határozzuk meg a két egyenes hajlásszögét ebben a pontban.

6. Bázist alkot-e $\mathbb{R}^3$-ben a következő három vektor?
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II. rész: Elméleti feladatok

7. Mondjuk ki a számsorozat határértékére vonatkozó rendőrelvet.

8. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény folytonos $[0,1]$-ben és differenciálható $(0,1)$-ben. Tudjuk továbbá, hogy $f'(x) > 0$ minden $x \in (0,1)$ esetén. Lehet-e ekkor $f(0) = f(1)$? A választ indokoljuk vagy adjunk példát. (Segítség: használjuk a Rolle-tételt.)

9. Legyen $f(x)$ kétszer differenciálható függvény az x_0 pontban. Adjunk meg az $f(x)$ függvény x_0-beli konvexitásához szükséges feltételt. Adjunk meg az $f(x)$ függvény x_0-beli konvexitásához elégséges feltételt.

10. Az
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$$
példán mutassuk be, hogyan értelmezzük végtelen intervallumon az improprius integrált.

11. Mutassuk meg, hogy a mátrixok szorzása nem kommutatív, azaz mutassunk olyan 2×2-es A és B mátrixokat, amelyekre $AB \neq BA$.

12. Adott három vektor $\mathbb{R}^3$-ben, amelyekről tudjuk, hogy *nem* lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor a három vektor bármelyike kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként? A választ indokoljuk vagy adjunk ellenpéldát.

Minden feladat 5 pontos. Az eredményes vizsgához mindkét részből külön-külön is legalább 9 pontot el kell érni.