

Matematika EP1 vizsga, 2015. jan. 8.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)^{3n^2 + 5}$$

sorozat határértékét.

2. Vizsgáljuk meg az $f(x) = e^{-x^2}$ függvényt: adjuk meg az értelmezési tartományát, mely intervallumon növekszik ill. csökken. Határozzuk meg a lokális szélsőértékek és inflexiós pontok helyét. Vázoljuk a függvény grafikonját.

3. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 3}}$$

függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatottjából $x = 0$ és $x = 1$ közé esik.

4. Számoljuk ki a $3x - 2y + 5z = 23$ egyenletű sík és az

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2t - 4 \\ z = 2t \end{cases}$$

egyenes összes metszéspontját. A metszéspontok számából következtessünk a sík és az egyenes kölcsönös helyzetére.

5. Bontsuk fel az $(5, -4, -2)$ vektort a $(2, -1, -2)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Mit jelent egy sorozat torlódási pontja? Adjunk egy-egy példát olyan a_n és b_n sorozatokra, amelyeknek pontosan két különböző véges torlódási pontjuk van, és amelyek esetén az $a_n + b_n$ sorozat torlódási pontjainak száma 1, 2, 3 ill. 4.
7. Mikor létezik az $f(x)$ függvény határértéke, bal oldali határértéke ill. jobb oldali határértéke az x_0 pontban? Igaz-e, hogy pontosan akkor létezik a határérték x_0 -ban, ha létezik a bal és jobb oldali határérték? Indokoljunk vagy adjunk ellenpéldát.
8. Mondjuk ki a Lagrange-féle középértéktételt. Ellenőrizzük a tétel állítását az $f(x) = x^2$ függvényre az $[1, 2]$ intervallumon.
9. Hogyan kell $n \times n$ -es mátrixok szorzatát kiszámítani? Indoklás nélkül soroljuk fel a művelet tulajdonságait (kommutativitás, asszociativitás, egységmátrix, inverz).
10. Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ \mathbb{R}^3 -beli vektorok lineáris függetlensége hogyan függ össze az általuk feszített paralelepipedon térfogatával? Hogyan ellenőrizhető ez egyszerűen? Végezzük el a számítást az $\underline{a} = (1, 1, 2)$, $\underline{b} = (1, 2, 1)$ és $\underline{c} = (2, 1, 1)$ esetre.

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.