Név: ....

Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2015. jan. 15.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az
$$a_n = \frac{107+3n^2}{36+n^2}$$
sorozat határértékét, és adjuk meg a $\varepsilon = 1/100$ értékhez tartozó küszöbindexet.

2. Az $y = \sqrt{x-1}+2$ görbe $x_0 = 5$ pontjához húzott érintőre ebben a pontban állított merőleges egyenes hol metszi a koordinátatengelyeket?

3. Barkács Bernát 2 mm-es lemezből kivág egy olyan síkidomot, amelyet a koordinátarendszerben a koordinátatengelyek és az $y = \cos x$ görbe $x = 0$ és $x = \pi/2$ közé eső darabja határolnak. Határozzuk meg az alakzat súlypontjának koordinátáit. (Segítség: használjuk a képletgyűjtemény formuláit és azonosságait, különösen az y koordináta számlálójának kiszámításához.)

4. Adjuk meg annak az origón átmenő egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges az alábbi két egyenesre.
$$\begin{cases} x = 3s+8 \\ y = 4-2s \\ z = -s-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5-5t \\ y = 4-2t \\ z = 3t+3 \end{cases}$$

5. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot (ha létezik) és az $A^{-1}\underline{\mathbf{b}}$ szorzatot.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet. Használjuk fel a tételt a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$
határérték kiszámításához.

7. Tegyük fel, hogy az f függvény szigorúan monoton csökkenő és differenciálható az (a,b) intervallumon. Definiáljuk ezt a két tulajdonságot. Igaz-e ekkor, hogy $f'(x) < 0$ minden $x \in (a,b)$ esetén? Ha igaz, indokoljuk, ha nem, adjunk ellenpéldát.

8. Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt. Hogyan kell az állítást módosítani, ha az
$$\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
integrált szeretnénk kiszámolni? Végezzük is el az integrálást.

9. Tekintsük az
$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszert valamely $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ valós együtthatókkal. Mivel minden egyenlet a jobb oldalán 0 áll, a Gauss-elimináció során nem juthatunk önellentmondó sorhoz. Hány megoldása lehet a fenti egyenletrendszernek? Ez az
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
együtthatómátrix milyen tulajdonságán múlik?

10. Mit jelent az, hogy a V vektortérben a W részhalmaz egy altér? A háromdimenziós vektorok $V = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ vektorterében alteret alkot-e a $W_1 = \{(x,y,z) : x = 3y-2z\}$ vektorhalmaz? És a $W_2 = \{(x,y,z) : x = 3y-2z+4\}$ részhalmaz? A választ indokoljuk.

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.