Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2015. jan. 8.

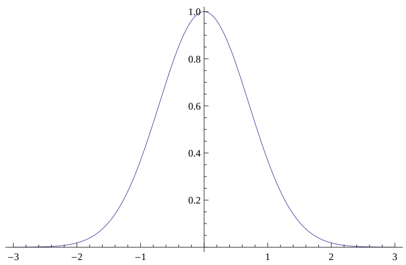
I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az
$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{3n^2+5}$$
sorozat határértékét.

   Megoldás:
$$a_n = \left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)^{3n^2+5} \to e^6.$$

2. Vizsgáljuk meg az $f(x) = e^{-x^2}$ függvényt: adjuk meg az értelmezési tartományát, mely intervallumon növekszik ill. csökken. Határozzuk meg a lokális szélsőértékek és inflexiós pontok helyét. Vázoljuk a függvény grafikonját.

   Megoldás: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, ezért $(-\infty, 0)$-n növekszik, $(0, \infty)$-en csökken, 0-ban lokális maximuma van, ehhez $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ második derivált a 0-ban negatív. Inflexiós pont a $\pm 1/\sqrt{2}$-ben.



3. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amely az
$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{x^2+4x+3}}$$
függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatottjából $x = 0$ és $x = 1$ közé esik.

   Megoldás:
$$\pi \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = \pi[\ln(x^2+4x+3)]_0^1 = \pi(\ln 8 - \ln 3).$$

4. Számoljuk ki a $3x - 2y + 5z = 23$ egyenletű sík és az
$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2t - 4 \\ z = 2t \end{cases}$$
egyenes összes metszéspontját. A metszéspontok számából következtessünk a sík és az egyenes kölcsönös helyzetére.

   Megoldás: $3(5-2t) - 2(2t-4) + 5 \cdot 2t = 23$ fennáll minden $t \in \mathbb{R}$-re, ezért a sík az egyenes minden pontját tartalmazza.

5. Bontsuk fel az $(5, -4, -2)$ vektort a $(2, -1, -2)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére.

   Megoldás: Párhuzamos: $(4, -2, -4)$, merőleges: $(1, -2, 2)$.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Mit jelent egy sorozat torlódási pontja? Adjunk egy-egy példát olyan a_n és b_n sorozatokra, amelyeknek pontosan két különböző véges torlódási pontjuk van, és amelyek esetén az $a_n + b_n$ sorozat torlódási pontjainak száma $1, 2, 3$ ill. 4.

   Megoldás: Ld. jegyzet. Példák: összegnek 1 torlódási pontja van, ha $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$, $b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$; összegnek 2 torlódási pontja van, ha $a_n = b_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$; összegnek 3 torlódási pontja van, ha $a_n = 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$, $b_n = 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots$; összegnek 4 torlódási pontja van, ha $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$, $b_n = 0, 0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, \dots$.

7. Mikor létezik az $f(x)$ függvény határértéke, bal oldali határértéke ill. jobb oldali határértéke az x_0 pontban? Igaz-e, hogy pontosan akkor létezik a határérték x_0-ban, ha létezik a bal és jobb oldali határérték? Indokoljunk vagy adjunk ellenpéldát.

   Megoldás: Ld. jegyzet. Nem igaz, a bal és jobb oldali határértéknek meg is kell egyeznie egymással. Pl. $f(x) = 0$ ha $x < 0$ és $f(x) = 1$, ha $x \geq 0$ esetén $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, de $\lim_{x\to 0} f(x)$ nem létezik.

8. Mondjuk ki a Lagrange-féle középértéktételt. Ellenőrizzük a tétel állítását az $f(x) = x^2$ függvényre az $[1, 2]$ intervallumon.

   Megoldás: Ld. jegyzet.
   $$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 3 = f'(3/2).$$

9. Hogyan kell $n \times n$-es mátrixok szorzatát kiszámítani? Indoklás nélkül soroljuk fel a művelet tulajdonságait (kommutativitás, asszociativitás, egységmátrix, inverz).

   Megoldás: Ld. jegyzet.

10. Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineáris függetlensége hogyan függ össze az általuk feszített paralelepipedon térfogatával? Hogyan ellenőrizhető ez egyszerűen? Végezzük el a számítást az $\underline{a} = (1, 1, 2)$, $\underline{b} = (1, 2, 1)$ és $\underline{c} = (2, 1, 1)$ esetre.

    Megoldás: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független $\iff$ általuk feszített paralelepipedon térfogata nem 0 $\iff$ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$
    $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.